代数拓扑学引论

陈奕培 编著





本书承福建省自然科学著作出版基金资助出版



厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数拓扑学引论/陈奕培编著. -厦门:厦门大学出版社,1999.12

ISBN 7-5615-1556-1

Ⅰ.代… Ⅱ.陈… Ⅲ.代数拓扑-概论 Ⅳ.O189.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 70542 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

三明地质印刷厂印刷

(地址:三明市富兴路 15 号 邮编:365001)

开本:850×1168 1/32 印张:7 插页:4

1999 年 12 月第 1 版 1999 年 12 月第 1 次印刷

字数:200 千字 印数:1—1000 册

定价:15.00 元

如有印装质量问题请与承印厂调换

内 容 提 要

本书介绍“代数拓扑学”的基本知识，其中第一章基本群、第二章覆盖空间、第三章单纯同调群、第四章同调序列等，是主要内容。至于高维同伦群、奇异同调群、上同调等，则作为补充知识在第五章加以介绍。而本书所必备的、有关交换群方面的代数知识，则作为附录编入，以供参考。

前　　言

拓扑学的中心问题是拓扑空间的分类问题，即以同胚的空间归为一类。因此，判别两个空间是否同胚乃基本而且重要的。要证明两个拓扑空间同胚，一个办法是找出两个空间之间的一个同胚映射，一般说来，这是相当困难的。因此从另一方面考虑，即从证明两个空间是不同胚着手。办法是通过某一个拓扑性质来检验。如果某一拓扑空间具有某个拓扑性质，而另一个拓扑空间则不具有该性质，从而判定该两个拓扑空间不同胚。这种以拓扑性质检验两个空间不同胚的方法是很有效的。利用点集拓扑学所引进的拓扑性质的概念，可以作为判别两个空间不同胚的依据。例如直线与平面不同胚，因为前者去掉一点后是一个不连通空间，而后者去掉一点仍然是连通的。又如通过紧致性概念可判定二维欧氏空间 R^2 与二维球面 S^2 不同胚，因为前者非紧致而后者是紧致的。然而即使很简单的空间，例如圆盘和圆环、二维球面和环面；通过点集拓扑所引进的诸多拓扑性质概念，包

括紧致性、连通性、分离性等等，都不足以把它们加以区分。因此需要以不同的方法，对拓扑空间引进新的拓扑不变性概念，用来判定两个拓扑空间的不同胚。这种新的方法是从拓扑空间引进某些代数结构，而且所引进的代数结构具有拓扑不变性。从而利用联系拓扑空间的代数结构的差别，来判定两个拓扑空间的不同胚。代数拓扑学就是研究与拓扑空间相联系的、拓扑不变的代数结构的理论。

本书介绍代数拓扑学中最主要的概念：同伦与同调。内容包括基本群、覆盖空间、单纯同调群、相对同调群与同调序列等基础知识。并把高维同伦群、奇异同调群、上同调等作为补充知识加以介绍。至于有关交换群的代数方面基本知识则作为附录编入，以供参考。

本书的出版，得到厦门大学数学系梁益兴教授和厦门大学出版社副编审吴天祥同志的支持和帮助，作者对他们表示衷心的感谢。

本书是作者多次讲授代数拓扑这门课程的部分讲稿，加以修改整理而成，可作为代数拓扑学的入门教材或参考书，由于水平所限，不妥或错误之处难免，希读者给予批评指正。

陈奕培

一九九七年十月于厦门大学

目　录

第一章　基本群

代数拓扑中的一个基本概念是同伦，它源自函数论所涉及的问题．设 X 是 R^2 的连通开子空间，两个实函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 在 X 中连续而且偏导数也连续．考虑微分形式 $f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ 在 X 中从点 P_0 到 P_1 的一条分段光滑曲线 C 上的线性积分 $\int f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$，一般而言，它不但与端点而且与曲线的选取有关，然而有些微分形式却与曲线的选择无关．后者亦即与沿 X 中任一闭路的积分为零是等价的．一个基本的结论是：$f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ 是正合的（即某函数的全微分），其充要条件是该积分与路线的选择无关．注意到 $f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ 的正合性，就是存在一个连续且偏导数也连续的函数 $u(x, y)$ 使得 $\mathrm{d}u = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$．这时 $u_y = g$，$u_x = f$．因此有关系式 $g_x = f_y$．然而，反过来，若 $f_y = g_x$，并不能保证 $f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ 是正合的．

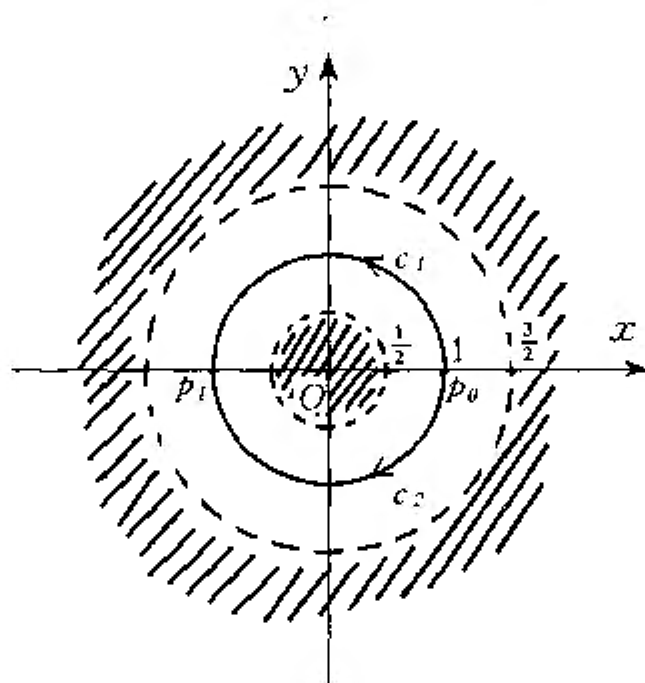


图 1－1

如图 1－1 所示，设 X 为半径分别等于 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 的同心圆之间的圆环区域，即

$$X=\left\{(x,y)\in R^2 \mid \frac{1}{2}<(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}<\frac{3}{2}\right\}.$$

考虑微分形式 $f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$，其中 $f=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$g=\frac{x}{x^2+y^2}$，这时 $f_y=g_x$，但是沿 P_0 到 P_1 的两条线路 C_1 与 C_2 的积分不相等．因为沿闭路 $C=C_1-C_2$ 的参数化 $x=\cos t$，$y=\sin t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的积分 $\int_C f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi\neq 0$．这是由于 X 中的闭路 C 包含一个洞．路线 C_1 不能在 X 中连续地变到 C_2，或是说闭路 C 不能在 X 中缩为一点．这个要求就是应用 Green 定理于关系式 $\int_C f\mathrm{d}x+\mathrm{d}g=\iint_X(g_x-f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，必须要求闭路 C 及其内部都落在 X 之中．上面提到的曲线的连续变形就是同伦概念的来源．

§1　道路的同伦

定义　从特殊的拓扑空间：单位闭线段 $I=[0,1]$ 到一般拓扑空间 X 的连续映射 $f:I\to X$ 称为 X 中的一条**道路**．$f(0)$ 与 $f(1)$ 分别称为该道路 f 的**起点**和**终点**；映射 f 称为连接 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的一条道路．而该映射 f 的像 $f([0,1])$ 则称为 X 中的一条曲线．

从给定的道路，可作出新的道路，我们有如下的

引理 1　(1) $f:I\to X$ 是 X 中的一条道路，则 $\bar{f}(t)=f(1-t):I\to X$ 也是一条道路．

(2) 设 f,g 是 X 中的两条道路，且 f 的终点是 g 的起点，则 $f*g:I\to X$ 由

$$f*g(t)=\begin{cases}f(2t),0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ g(2t-1),\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

所决定的映射也是一条道路.

证明： (1)因为 $f:I\to X$ 连续，而 $t\to 1-t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 $I\to I$ 的连续映射，因此两个连续映射的复合 $f(1-t):I\to X$ 也是连续的，即 $f(1-t)$ 也是一条道路.

(2)因为 $f(2t)(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2})$ 和 $g(2t-1)(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1)$ 均连续，而且 $f*g(0)=f(2t)|_{t=0}=f(0)$，$f*g(1)=g(2t-1)|_{t=1}=g(1)$ 都是确定值，并且满足条件 $f(1)=g(0)$，由点集拓扑中的粘合引理，$f*g$ 也是 I 到 X 的道路. ▌

定义 $\bar{f}$ 称为 f 的**逆道路**；$f*g$ 称为道路 f 与 g 的**乘积道路**.

定义 设 f 与 g 是具相同端点的道路，即 $f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)$；如果存在连续映射 $F:I\times I\to X$ 满足 $F(t,0)=f(t)$，$F(t,1)=g(t)$，$t\in I$；而且 $F(0,s)=f(0)=g(0)=x_0\in X$，$F(1,s)=f(1)=g(1)=x_1\in X$，$s\in I$. 则称 X 中的道路 f 和 g 是**同伦的**.或称 f 与 g 是等价的.记为 $f\sim g$ 或 $f\underset{F}{\simeq}g$.这时也称 F 是 f 到 g 的一个**同伦或伦移**.(参

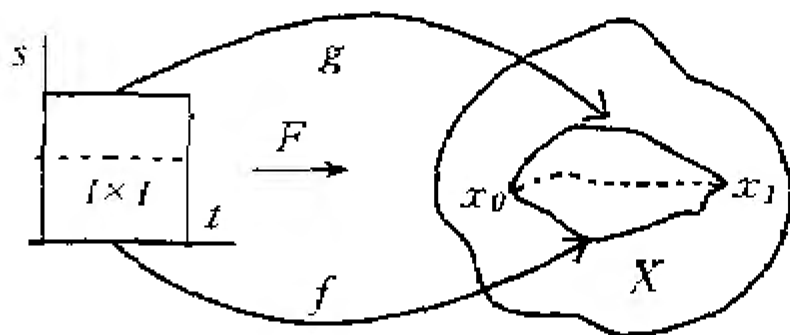


图 1－2

阅图 1-2)
直观意义即在 X 中存在着从曲线 $f(t)$ 到 $g(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的连续变形.

注 有时为了明确同伦的道路在 $t=0,1$ 处具相同的端点，也用记号 $f\underset{F}{\simeq}g\ \mathrm{rel}(0,1)$ 或称 f 与 g 相对于端点 0 和 1 是同伦的，注意到这样的同伦 F 满足 $F(0,s)=f(0)$, $F(1,s)=f(1)$.

引理 2 (1) $f\simeq f\ \mathrm{rel}(0,1)$; (2) 若 $f\simeq g\ \mathrm{rel}(0,1)$，则 $g\simeq f\ \mathrm{rel}(0,1)$; (3) 若 $f\simeq g\ \mathrm{rel}(0,1)$，且 $g\simeq h\ \mathrm{rel}(0,1)$；则 $f\simeq h\ \mathrm{rel}(0,1)$

证明 (1) 设 $f: I\to X$，则 $F(t,s)=f(t)$, $s\in I$ 是从 f 到 f 的一个同伦

(2) 设 $F: I\times I\to X$ 是 f 与 g 的同伦，则 $F(t,s)=F(t,1-s)$, $t\in I$, $s\in I$ 是 g 到 f 的同伦

(3) 设 $f\underset{F}{\simeq}g$, $g\underset{G}{\simeq}h$，定义 $H: I\times I\to X$ 为

$$H(t,s)=\begin{cases}F(t,2s), 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ G(t,2s-1), \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases};0\leqslant t\leqslant 1$$

当 $s=\frac{1}{2}$, $F(t,1)=g(t)$, $G(t,0)=g(t)$，根据粘合引理，$H(t,s)$ 连续 而且 $H(t,0)=f(t)$, $H(t,1)=h(t)$, $t\in I$ 所以 $H(t,s): I\times I\to X$ 是 f 到 h 的同伦 ▌

据此，道路 $f: I\to X$ 的同伦概念是等价性概念 我们称与 f 等价的全部道路为道路 f 的**等价类(或同伦类)**，记为 $[f]$.

一对同伦的道路与另一对同伦的道路的相应乘积道路是否同伦？我们有

引理 3 设 $f_0\simeq f_1$, $g_0\simeq g_1$；而且 $f_0(1)=g_0(0)$, $f_1(1)=g_1(0)$；则 $f_0*g_0\simeq f_1*g_1$

证明　如图1-3所示，设 $f_0 \simeq_F f_1$，$g_0 \simeq_G g_1$；定义 $H: I\times I\to X$ 为

$$H(t,s)=\begin{cases}F(2t,s), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ G(2t-1,s), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

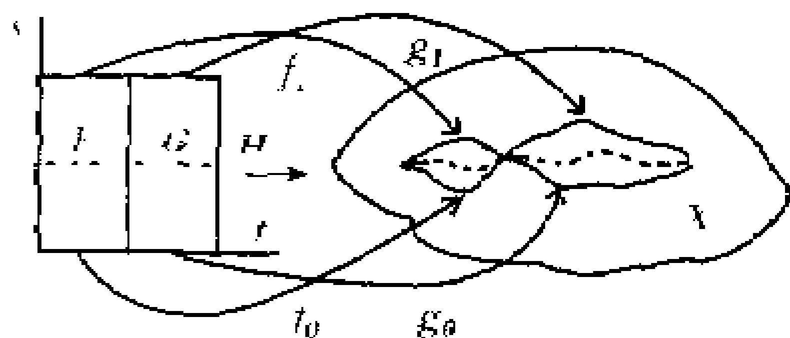


图1-3

因为当 $t=\frac{1}{2}$，$F(1,s)=f_0(1)$，$G(0,s)=g_0(0)$，由粘合引理，H 连续．此外，

$$H(t,0)=\begin{cases}F(2t,0)=f_0(2t), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ G(2t-1,0)=g_0(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}=f_0*g_0(t),$$

$$H(t,1)=\begin{cases}F(2t,1)=f_1(2t), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ G(2t-1,1)=g_1(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}=f_1*g_1(t)$$

因此 $f_0*g_0\sim f_1*g_1$，即相应的乘积道路属于同一个等价类 $[f*g]$．∎

定义　道路等价类 $[f]$ 与 $[g]$ 的乘积属于同一个等价类

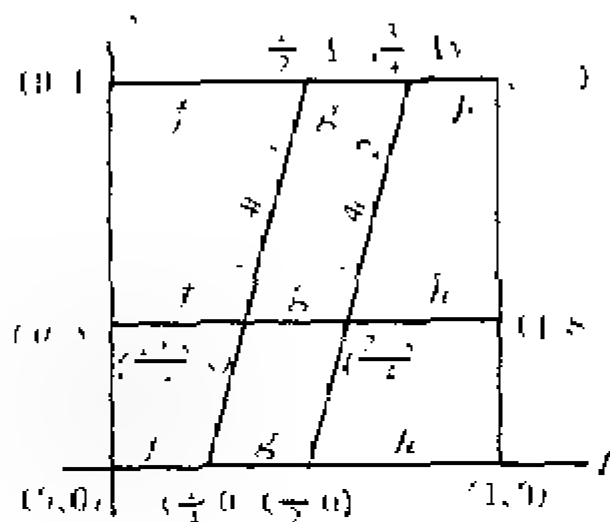


图 1－4

$[f*g]$

一般而言，$(f*g)*h \neq f*(g*h)$，即道路的乘积不满足结合律．然而我们有

引理 4　设 f、g、h 是 X 中的三条道路，而且 $f(1)=g(0)$，$g(1)=h(0)$，则 $(f*g)*h \simeq f*(g*h)$．

因此 $([f][g])[h]=[f]([g][h])$，即道路的等价类的乘积满足结合律

证明　根据乘积道路的定义，我们有如下的乘积道路：

$$
(f*g)*h(t)=\begin{cases} f(4t), & t\in[0,\frac{1}{4}] \\ g(4t-1), & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ h(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}
$$

$$
f*(g*h)(t)=\begin{cases} f(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ g(4t-2), & t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ h(4t-3), & t\in[\frac{3}{4},1] \end{cases}
$$

如图 1－4 所示，按照分段线性变换作出一个同伦 $F:I\times I\to X$，由下式所决定：

$$F(t,s)=\begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{1+s}\right), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1), & \dfrac{s+1}{4}\leqslant t\leqslant \dfrac{s+2}{4} \\ h\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right), & \dfrac{s+2}{4}\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

它由满足条件 $F(t,0)=(f*g)*h(t)$, $F(t,1)=f*(g*h)(t)$ 所决定 ▌

引理5 设 f 是 X 中从 x 到 y 的道路，则 $e_x*f\sim f$ 而且 $f*e_y\sim f$，此中 e_x 与 e_y 分别是常值道路 x 与 y. 因此 $[e_x][f]=[f][e_y]$.

证明 如图1-5所示，作出一个同伦 $F: I\times I\to X$ 由下式所决定：

$$F(t,s)=\begin{cases} e_x, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1-s}{2} \\ f\left(\dfrac{2t-1+s}{1+s}\right), & \dfrac{1-s}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

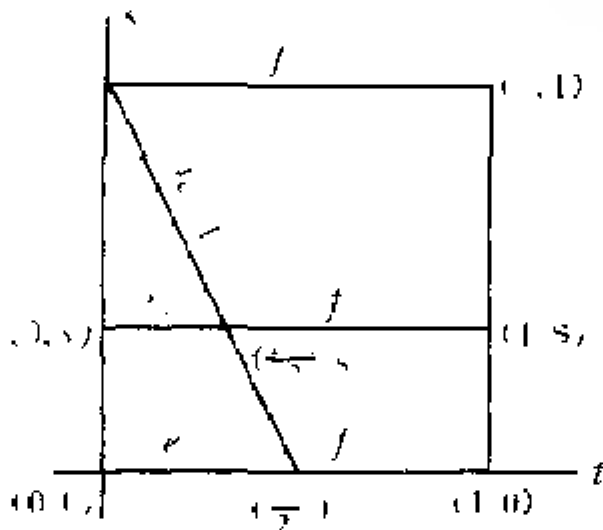


图1-5

它满足条件 $F(t,0)=e_x*f$, $F(t,1)=f(t)$；而且 $F(0,s)=e_x=f(0)$, $F(1,s)=f(1)$ 因此 $e_x*f\sim f$，即 $[e_x][f]=[f]$. 同理可证明 $[f][e_y]=[f]$. ▌

引理6 设 f 是 X 中以 x 为起点，y 为终点的道路，则 $f\bar f\sim e_x$ 且 $\bar f f\sim e_y$ 因此 $[f][\bar f]=[e_x]$，$[\bar f][f]=[e_y]$.

证明 我们只证明 $f\bar f\sim e_x$；同理可证明 $\bar f f\sim e_y$

因为

$$f*\bar{f}(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2} \\ \bar{f}(2t-1)=f(2-2t), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

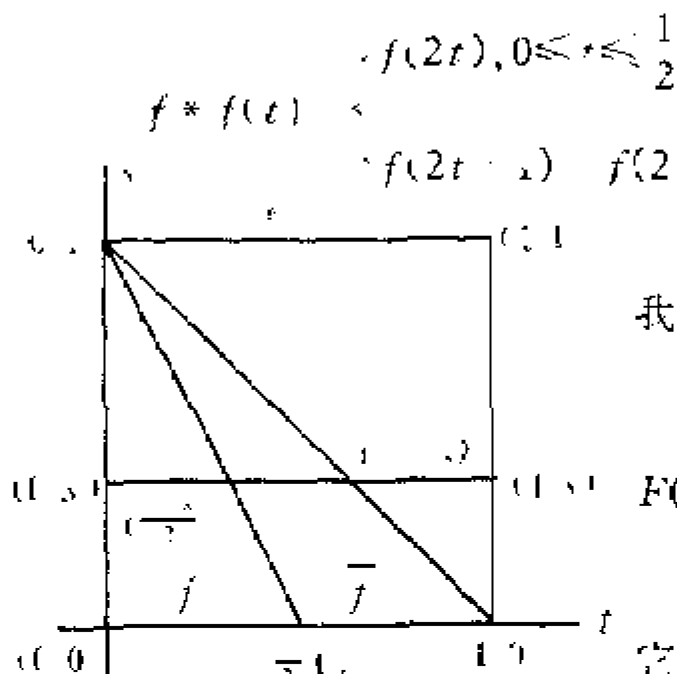


图 1－6

$$e_x(t)=x,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

我们作出一个同伦

$$F(t,s)=\begin{cases} f(\frac{2t}{1-s}), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1-s}{2} \\ \bar{f}(\frac{2t-1+s}{1-s}), & \frac{1-s}{2}\leqslant t\leqslant 1-s \\ e_x, & 1-s\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

它满足条件 $F(t,0)=f*\bar{f}(t)$，$F(t,1)=e_x(t)$ ▌

§2　基本群

一般的道路，由于起点与终点不同，情况较复杂，现在考虑一种特殊的道路.

定义　道路 $f: I\to X$，当它满足 $f(0)=f(1)=x_0\in X$，即起点与终点重合，这时称 f 是 X 中以 x_0 为基点的**闭路（或回路）**.

从上节得知，每条闭路 f 决定一个闭路等价类 $[f]$，我们将 X 中以 x_0 为基点的闭路等价类集合记为 $\pi_1(X,x_0)$.

上节中有关道路等价类的性质，对闭路等价类当然也成立. 因此，对 $[f],[g],[h]\in\pi_1(X,x_0)$，由上节引理 4、引理 5 和引理 6，则下列三个结论成立：

(1)它们的乘积是可结合的,即$([f][g])[h]=[f]([g][h])$

(2)每个闭路等价类的左(右)逆元相等;即$[\bar{f}][f]=[f][\bar{f}]=[e_{x_0}]$,此中 e_{x_0} 是以 x_0 为基点的常值闭路

(3)以 x_0 为基点的闭路等价类具唯一的恒等元$[e_{x_0}]$;即$[e_{x_0}][f]=[f][e_{x_0}]=[f]$

从此得出

定理　$\pi_1(X,x_0)$关于闭路等价类的乘积构成一个群

定义　群 $\pi_1(X,x_0)$称为 X 中以 x_0 为基点的**基本群**,或 Poincare **群**,或**一维同伦群**

定理　设 $x,y\in X$,若存在 X 中从 x 到 y 的一条道路,则 $\pi_1(X,x)$与 $\pi_1(X,y)$同构

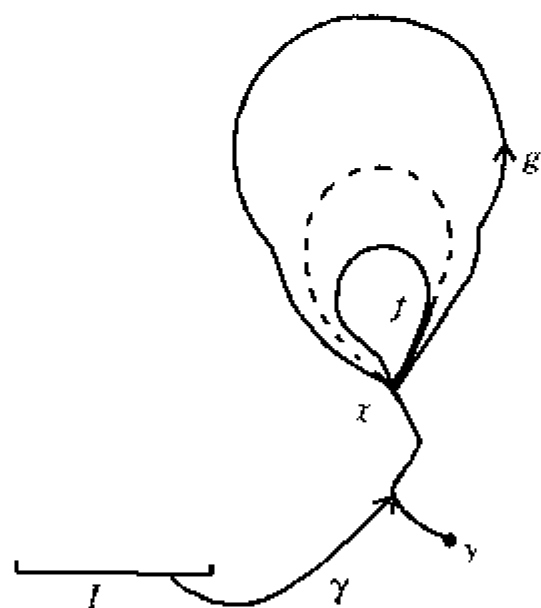


图1-7

证明　设存在 X 中从 x 到 y 的一条道路 $\gamma: I\to X$,满足 $\gamma(0)=x$,$\gamma(1)=y$;则 $\bar{\gamma}$ 是 X 中从 y 到 x 的一条道路.如图1-7所示,对于基点在 x 处的任一闭路 f,对应着以 y 为基点的闭路 $\bar{\gamma}*f*\gamma$,而且当以 x 为基点的两条闭路 f 与 g 是同伦的,即 $f\sim g$;则相应地有 $\bar{\gamma}*f*\gamma\simeq\bar{\gamma}*g*\gamma$.因此$[f]$与$[\bar{\gamma}*f*\gamma]$的对应是完全确定的,与$[f]$的代表选择无关.我们把这样的对应记为 γ_*,即

$$\gamma_*:[f]\mapsto[\bar{\gamma}*f*\gamma].$$

因为 $\gamma_*([f_1][f_2])=[\bar{\gamma}*f_1*\gamma*\bar{\gamma}*f_2*\gamma$

$$[\bar{\gamma} * f_1 * \gamma][\bar{\gamma} * f_2 * \gamma] = \gamma_*[f_1]\gamma_*[f_2]$$

所以 $\gamma_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,y)$ 是一个同态. 同理, 由 $\bar{\gamma}$ 也决定了以 y 为基点的闭路等价类到以 x 为基点的闭路等价类的同态, 即 $\bar{\gamma}_*[f]=[\gamma * f * \bar{\gamma}]$ 所决定的同态

$$\bar{\gamma}_*:\pi_1(X,y)\to\pi_1(X,x)$$

容易验证 $\bar{\gamma}_*\gamma_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,x)$, $\gamma_*\bar{\gamma}_*:\pi_1(X,y)\to\pi_1(X,y)$ 都是恒同同态. 因此 γ_* 是满单射, 即 $\pi_1(X,x)$ 与 $\pi_1(X,y)$ 同构. ▍

推论　设 X 是道路连通空间, 则对任意两点 $x,y\in X$, $\pi_1(X,x)\approx\pi_1(X,y)$. ▍

据此, 对道路连通空间, 它的基本群与基点的选择无关, 所以可简记为 $\pi_1(X)$.

定理　设 φ 是拓扑空间 X 到 Y 的连续映射, 则 φ 诱导出一个同态

$$\varphi_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,\varphi(x)).$$

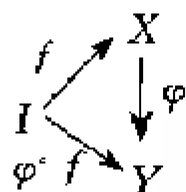


图 1-8

证明　如图 1-8 所示, 对 X 中以 x 为基点的闭路 f, 在 φ 之下映为 Y 中以 $\varphi(x)$ 为基点的闭路. 我们对不同空间的连续映射的乘积用记号"$\circ$"表示, 而同一空间的连续映射的乘积则用记号"$*$"表示, 于是有关系式

$$f(0)=f(1)=x,\ \varphi\circ f(0)=\varphi\circ f(1)=\varphi(x)$$

设 f 与 g 是中以 X 为基点的等价闭路, 即 $f\sim g$, 则存在同伦 $F:I\times I\to X$ 满足 $F(t,0)=f(t)$, $F(t,1)=g(t)$. 因此 $\varphi\circ F(t,0)=\varphi\circ f(t)$, $\varphi\circ F(t,1)=\varphi\circ g(t)$, 即存在同伦 $\varphi\circ F:I\times I\to Y$ 使得 $\varphi\circ f\sim\varphi\circ g$

从此得知，对$[f]\in\pi_1(X,x)$决定$[\varphi\circ f]\in\pi_1(Y,\varphi(x))$的对应与$[f]$的代表的选择无关，即对应$\varphi_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,\varphi(x))$由$\varphi_*[f]=[\varphi\circ f]$完全确定．这样的对应还满足：对任意的$[f_1]$，$[f_2]\in\pi_1(X,x)$，

$$\varphi_*([f_1][f_2])=\varphi_*([f_1*f_2])=[\varphi\circ(f_1*f_2)]=[(\varphi\circ f_1)*(\varphi\circ f_2)]$$
$$=[\varphi\circ f_1][\varphi\circ f_2]=\varphi_*([f_1])\varphi_*([f_2]).$$

所以φ_*是由φ诱导的同态，称为φ的诱导同态 ▌

定理　设$\varphi:X\to Y$与$\psi:Y\to Z$分别是拓扑空间X到Y和Y到Z的连续映射，则$(\psi\circ\varphi)_*=\psi_*\circ\varphi_*$．

证明　因为φ与ψ是连续的，所以$\psi\circ\varphi:X\to Z$也是连续的．于是由上述定理，存在诱导同态：

$\varphi_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,\varphi(x))$，$\psi_*:\pi_1(Y,\varphi(x))\to\pi_1(Z,\psi\circ\varphi(x))$

$(\psi\circ\varphi)_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(Z,\psi\circ\varphi(x))$

对任一闭路等价类$[f]\in\pi_1(X,x)$，

$(\psi\circ\varphi)_*[f]=[\psi\circ\varphi\circ f]=\psi_*([\varphi\circ f])=\psi_*\circ\varphi_*([f])$成立，因此$(\psi\circ\varphi)_*=\psi_*\circ\varphi_*$． ▌

定理　设$1_X:X\to X$是拓扑空间X到自身的恒同映射，则1_{X*}是$\pi_1(X,x)(x\in X)$上的恒同同态．

证明　因为$1_X(x)=x$，而且对$f:I\to X$，$1_X\circ f=f\circ 1_X=f$；所以$1_{X*}:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,x)$是恒同同态． ▌

推论　设$\varphi:X\to Y$是同胚，则φ_*是同构．

证明　设φ是X到Y的同胚，则存在同胚逆$\varphi^{-1}:Y\to X$满足$\varphi^{-1}\circ\varphi=1_X$，$\varphi\circ\varphi^{-1}=1_Y$．由前面两个定理，则有

$\varphi_* \varphi_* = 1_{X*}$, $\varphi_* \varphi_*^{-1} = 1_{Y*}$，两者都是恒同同态，因此 φ_* 是同构 ▌

注　从此，如果 $\pi_1(X)$ 与 $\pi_1(Y)$ 不同构，则 X 与 Y 不同胚.

§3　映射的同伦

现在把§1的特殊拓扑空间单位线段 I 扩充为一般的拓扑空间，从而引进拓扑空间之间的连续映射的一种等价性关系.

定义　给定两个连续映射 $f_0, f_1: X \to Y$，如果存在一个连续映射 $F: X \times I \to Y$ 满足 $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, $x \in X$ 则称 f_0 与 f_1 是**同伦的**. 这时该连续映射 F 称为 f_0 与 f_1 之间的一个**同伦**或**伦移**，记为 $f_0 \simeq_F f_1$ 或 $F: f_0 \simeq f_1$

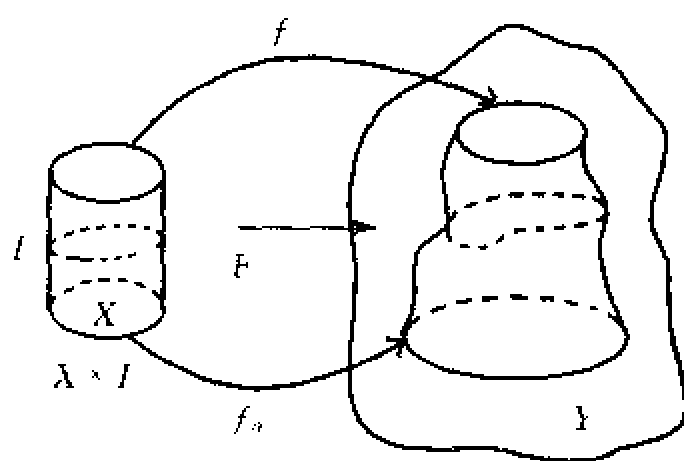


图1–9

如图1–9所示，对每个 $t \in [0,1]$，记 $F(x,t) = f_t(x)$，则 $f_t: X \to Y$ 是一个连续映射. 因此两个映射 f_0 与 f_1 是同伦的直观意义即 f_0 的像可以连续地变形为 f_1 的像.

设 $f_0, f_1: X \to Y$ 是同伦的，而且联系这两个映射的同伦对子集 $A(\subset X)$ 的任一点在变形过程中保持不

变，于是有如下的概念：

定义　设 $A\subset X$，$f_0, f_1: X\to Y$ 是连续映射；如果存在 f_0 与 f_1 之间的同伦 $F: X\times I\to Y$ 使得对任一点 $a\in A$，$F(a,t)(t\in I)$ 与 t 无关；即 $F(x,0)=f_0(x)$，$F(x,1)=f_1(x)$，$x\in X$ 而且对一切 $a\in A$ 和 $t\in I$，$F(a,t)=f_0(a)$。这时称 f_0 与 f_1 **相对于 A 是同伦的**，该伦移 F 称为相对于 A 的伦移，记为 $f_0\simeq f_1$ rel A 或 $f_0 \underset{\text{rel}A}{\simeq} f_1$。

注意到 $f_0\simeq f_1$ 与 $f_0\underset{\text{rel}A}{\simeq} f_1$ 是不同的。例如 $X=I$、$A=\{0,1\}$；设 f_0 与 f_1 是 I 到圆环的两条道路，当该两条道路包围圆环的内边界圆周时，$f_0\simeq f_1$ 可以成立，而 $f_0\underset{\text{rel}A}{\simeq} f_1$ 则不成立。

引理　在拓扑空间 X 到 Y 的连续映射集合 $C(X,Y)$ 中，关系 $\underset{\text{rel}A}{\simeq}$ 是一个等价性关系。

证明　因为存在着连续映射 $F(x,t)=f(x)$，对一切 $t\in I$ 成立，即 $f\underset{\text{rel}A}{\simeq} f$，这表明关系 $\underset{\text{rel}A}{\simeq}$ 具反身性。

其次，设 $F: f\simeq g$，即存在同伦 $F(x,t): X\times I\to Y$ 满足 $F(x,0)=f$，$F(x,1)=g$，$F(x,t)=f(x)$，$x\in A$，$t\in I$。于是连续映射 $G(x,t)=F(x,1-t): X\times I\to Y$ 也是连续的，而且它是 $g\underset{\text{rel}A}{\simeq} f$ 的一个伦移，说明关系 $\underset{\text{rel}A}{\simeq}$ 具对称性。

最后，设 $F: f\underset{\text{rel}A}{\simeq} g$，$G: g\underset{\text{rel}A}{\simeq} h$，则连续映射 $H: X\times I\to Y$ 由

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2} \\ G(x,2t-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

所决定，分别在闭集 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，而且在 $t=\frac{1}{2}$ 处取值一致，由粘合引理，$H(x,t)$ 连续，它是 $f\underset{\text{rel}A}{\simeq} h$ 的伦移，证明了 $\underset{\text{rel}A}{\simeq}$ 具传递性。▌

根据引理,则 $C(X,Y)$ 在 $\simeq$ 之下分为若干等价类. 其中有特殊的一类,如下述.

定义 当连续映射 $f: X\to Y$ 与常值映射 $c: X\to Y$ 由 $c(x)=y_0\in Y$, $x\in X$ 所决定者是同伦的,则称 f 是**零伦的**.

通过连续映射的同伦概念,可以拓扑空间建立一种分类.

定义 对拓扑空间 X, Y;如果存在连续映射 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to X$ 使得 $g\circ f\simeq 1_X: X\to X$ 而且 $f\circ g\simeq 1_Y: Y\to Y$,则称 X 与 Y 是**同伦等价的**,或称 X 与 Y 具相同的**伦型**. 这时 f(相应地 g)称为具**同伦逆** g(相应地 f)的同伦等价性.

显然,同胚的空间必具相同的伦型,但是反之不成立,因此伦型不是拓扑不变性. 例如 R^n 中 n 维圆盘 $D^n(n>0)$ 与一点 $\{y\}\in D^n$ 不同胚,但是它们具相同伦型. 因为这时包含映射 $i: \{y\}\to D^n$ $(y\in D^n)$ 与常值映射 $c: D^n\to\{y\}$ 满足 $c\circ i=1_{\{y\}}$,而且存在连续映射 $F: D^n\times I\to D^n$ 由 $F(x,t)=tx+(1-t)y$ 所决定是 $D^n\times I\to D^n$ 的连续映射,它是 $i\circ c$ 与 1_{D^n} 之间的一个同伦.

引理 同伦等价关系是拓扑空间的等价性关系.

证明 (1)反身性. 存在 $1_X: X\to X$ 满足 $1_X\circ 1_X\simeq 1_X$,所以 X 与自身同伦等价.

(2)对称性. 设 X 与 Y 同伦等价,则存在 $f: X\to Y$, $g: Y\to X$ 使得 $f\circ g\simeq 1_Y$, $g\circ f\simeq 1_X$. 这两个关系式前后对调,即表明 Y 与 X 同伦等价.

(3)传递性. 设 X 与 Y 同伦等价,则存在 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to X$,满足 $f\circ g\simeq 1_Y$ 和 $g\circ f\simeq 1_X$;而 Y 与 Z 同伦等价,故存在 $u: Y\to Z$ 和 $v: Z\to Y$ 满足 $u\circ v\simeq 1_Z$ 和 $v\circ u\simeq 1_Y$. 因此,$(g\circ v)\circ(u\circ f)\simeq g\circ 1_Y\circ f=g\circ f\simeq 1_X$,而且 $(u\circ f)\circ(g\circ v)\simeq u\circ 1_Y\circ v=u\circ v\simeq 1_Z$,证明了 X 与 Z 同伦等价. ▌

根据同伦等价的概念，拓扑空间可按伦型加以分类．其中特殊的一类如下：

定义　若空间 X 与 X 中的一点同伦等价，则称 X 是个**可缩空间**．

例　n 维圆盘是可缩的．

例　R^n 中一般凸集是可缩的．

例　对圆柱 $C=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2=1,\ -1\leqslant z\leqslant 1\}$ 与圆周 $S^1=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2=1, z=0\}$，包含映射 $i: S^1\to C$ 和 $r: C\to S^1$ 由 $r(x,y,z)=(x,y,0)$ 所决定，满足 $r\circ i\simeq 1_{S^1}: S^1\to S^1$，而且 $i\circ r\simeq 1_C$；因为存在 $F: C\times I\to C$ 由 $F((x,y,z),t)=(x,y,tz)$ 所决定的连续映射，因此 C 与 S^1 是同伦等价的．

现在引进下面的一些概念：

定义　设 A 是拓扑空间 X 的子集，如果存在连续映射 $r: X\to A$ 满足 $r|_A=1_A$；则映射 r 称为**收缩**(映射)，这时 A 称为 X 的一个**收缩核**．

定义　设 $A\subset X$，如果存在一个收缩 $r: X\to A$ 满足 $i\circ r\simeq 1_X: X\to X$，此中 $i: A\to X$ 是包含映射，$r\circ i=1_A$，则称 A 是 X 的**变形收缩核**．

例　圆周是圆柱的变形收缩核．

变形收缩核必定是收缩核，但反之不成立．例如常值映射 $x_0: X\to x_0\in X$，则 x_0 是 X 的收缩核；但 X 不一定可缩为一点 x_0，即 x_0 不一定是 X 的变形收缩核．

定义　设 $A\subset X$，如果存在一个收缩 $r: X\to A$ 满足 $i\circ r\underset{\mathrm{rel}A}{\simeq} 1_X: X\to X$，即在变形过程中，$A$ 的点保持不动，则称 A 是 X 的**强变形收缩核**．

例　当圆柱 C 收缩为圆周 S^1 时，在过程中 S^1 上的点变动或保持不变动，则 S^1 分别是变形收缩核或强变形收缩核.

上一节曾导出两个拓扑空间之间的连续映射诱导出它们的基本群之间的诱导同态. 不同的连续映射诱导出不同的诱导同态，特当两个拓扑空间之间的两个连续映射是同伦的，则相应的诱导同态必存在一定关系. 我们要证明它们之间相差一个同构.

定理　设连续映射 $\varphi, \psi: X \to Y$ 是同伦的，其同伦 $F: X \times I \to Y$. 对 $x_0 \in X$，$\varphi(x_0), \psi(x_0) \in Y$，$F$ 满足 $F(x, 0) = \varphi(x)$，$F(x, 1) = \psi(x)$，设 $\gamma: I \to Y$ 是 Y 中从 $\varphi(x_0)$ 到 $\psi(x_0)$ 的道路，由 $\gamma(s) = F(x_0, s)$ 所决定，则 $\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ 与 $\psi_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ 满足关系式 $\psi_* = \gamma_* \varphi_*$，此中 γ_* 是由 γ 决定的 $\pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ 的同构.

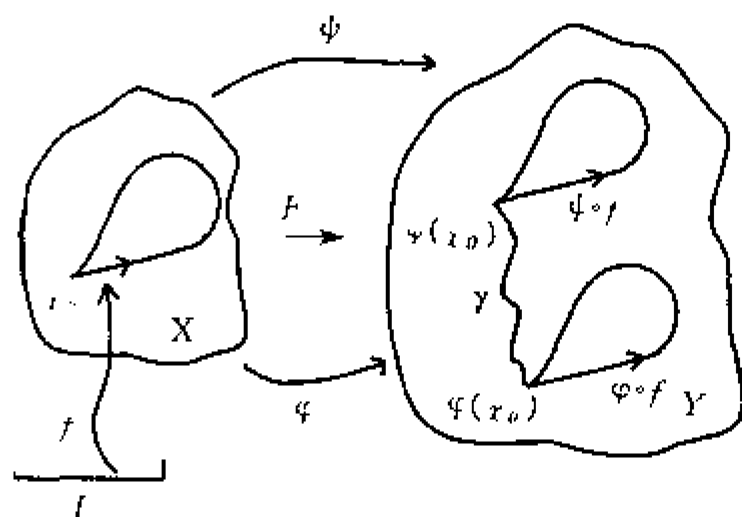


图 1-10

证明　如图 1-10 所示，设 f 是 X 中以 x_0 为基点的闭路，其等价类为 $[f]$，则 $\psi_*([f]) = [\psi \circ f]$，$\gamma_* \varphi_*([f]) = [\gamma^{-1} * (\varphi \circ f) * \gamma]$.



图1-11

如图1-11，由于在 Y 中存在一个同伦 $H: I\times I\to Y$ 满足 $\psi\circ f\simeq(\gamma^{-1}*(\varphi\circ f))*\gamma\ \mathrm{rel}\{0,1\}$ 由

$$H(t,s)=\begin{cases}F(x_0,1-4t(1-s)), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{4}\\ F(f(4t-1),s), & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ F(x_0,1+2(t-1)(1-s)), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

所决定。它满足

$H(t,0)=(\gamma^{-1}*(\varphi\circ f)*\gamma(t))$，$H(t,1)=(e_{x_0}*(\psi\circ f)*e_{x_0})(t)$，$H(1,s)=F(x_0,1)=\psi(x_0)$。因此 ψ_* 与 φ_* 同构 ∎

定理 设 X 与 Y 具相同的伦型，则它们的基本群同构.

证明 设 X 与 Y 具相同的伦型，则存在着连续映射 φ 与 ψ 满足

$\psi\circ\varphi \simeq 1_X: X\to X, \varphi\circ\psi \simeq 1_Y: Y\to Y.$

由上述定理，存在同构 γ_*（γ 是连接 x_0 与 $\psi\circ\varphi(x_0)$ 的道路）使得 $\gamma_*(\psi\circ\varphi)_* = 1_{X_*}$（恒同同构）。因此 $\psi_*\circ\varphi_*$ 是同构。同理可证 $\varphi_*\circ\psi_*$ 也是同构，从此 φ_*，ψ_* 都是同构。▌

推论 同胚的空间，其基本群同构。▌

例 圆柱面、穿孔的平面、圆环、Mobius 带等都是与圆周 S^1 具相同的伦型，所以它们的基本群是相同的。

例 可缩空间与单点空间具相同伦型，而单点空间的基本群是平凡群，因此可缩空间的基本群是平凡的。然而基本群为平凡群的空间不一定可缩。

定义 对道路连通空间 X，如果它的基本群是平凡的，则称 X 为**单连通空间**。

注 可缩空间必为单连通空间；而单连通空间不一定可缩，例如球面 S^2。

定理 设空间 X 具开覆盖 $\{V_i\}$ 满足 $\bigcap V_i\neq\varnothing$，其中每个 V_i 是单连通的，而且对 $i\neq j$，$V_i\cap V_j$ 是道路连通的，则 X 是单连通的。

证明 因为每个开集 V_i 是单连通的，当然也是道路连通的。它们的交集非空，也是道路连通的，因此 X 是道路连通空间。

于是，对任意的 $x_0\in\bigcap V_i$，只须证明 $\pi_1(X, x_0)$ 是平凡群即完成定理的证明。也就是说，对任一个等价类 $[\alpha]\in\pi_1(X, x_0)$，此中 $\alpha: I\to X$ 是以 x_0 为基点的闭路，只须证明 $[\alpha]=[e_{x_0}]$ 即可。

集合 $\{\alpha^{-1}(V_i)\}$ 显然是 I 的开覆盖。由于 I 是紧致的，因此有一个 Lebesque 数 $\varepsilon>0$，当 I 的分割 $\{t_0, t_1, \cdots, t_j, \cdots, t_n\}$ 满足 $|t_j, t_{j+1}|<\varepsilon$ 时，则 $\alpha([t_j, t_{j+1}])\subset$ 某个 V_i 中，现令 $\alpha_j(s)=\alpha((1-s)t_j+st_{j+1})$，$s\in I$；则 $[\alpha]=[\alpha_0*\alpha_1*\cdots*\alpha_{n-1}]$。由于 $V_{j-1}\cap V_j$

道路连通，因此有一条从 x_0 到 $\alpha(t_j)$ 的道路 ρ_j 落在 $V_{j-1}\cap V_j$ 之中，因此

$$[\alpha]=[\alpha_0*\bar{\rho}_1*\rho_1*\alpha_1*\bar{\rho}_2*\rho_2*\cdots\cdots*\bar{\rho}_{n-1}*\rho_{n-1}*\alpha_{n-1}]$$
$$=[\alpha_0*\bar{\rho}_1][\rho_1*\alpha_1*\bar{\rho}_2]\cdots\cdots[\rho_{n-1}*\alpha_{n-1}]$$

上式右边每个因子都是落在单连通集中的闭路等价类，它们都与基点 x_0 的同伦类等价，即 $[\rho_i*\alpha_i*\bar{\rho}_{i+1}]=[e_{x_0}]$。因此 $[\alpha]=[e_{x_0}]\cdots\cdots[e_{x_0}]=[e_{x_0}]$。▌

例　对 $S^n(n\geqslant 2)$，取 $U=S^n-\{P_0\}$，$V=S^n-\{P_0'\}$，P_0、P_0' 是 S^n 的一对对径点，则 U 与 V 均为单连通的，而且 $U\cap V$ 是非空的道路连通空间，由于 $U\cup V=S^n$，所以 S^n 是单连通空间，因此 $\pi_1(S^n)\approx\{0\}$。

定理　设 X，Y 为两个道路连通空间，则 $X\times Y$ 的基本群与 X、Y 的基本群的直积同构。

证明　因为投影 $p:X\times Y\to X$ 和 $q:X\times Y\to Y$ 都是连续的，所以它们诱导出基本群之间的同态

$$p_*:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\text{ 和}$$
$$q_*:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(Y,y_0).$$

现定义　$\varphi:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$，$x_0\in X$，$y_0\in Y$ 为 $\varphi[f]=(p_*[f],q_*[f])=([p\circ f],[q\circ f])$。先证明 φ 与等价类的代表的选择无关，即 φ 是完全确定的：设 $f\simeq g$，则存在连续映射 $F:I\times I\to X\times Y$ 满足 $F(t,0)=f(t)$，$F(t,1)=g(t)$，$F(0,s)=F(1,s)=(x_0,y_0)$。于是 $pF:I\times I\to X$，$qF:I\times I\to Y$ 分别提供两个同伦：$p\circ f\sim p\circ g$，$q\circ f\sim q\circ g$，因此 $\varphi[f]=(p_*[f],q_*[f])=([p\circ f],[q\circ f])=([p\circ g],[q\circ g])=(p_*[g],$

$q_*[g])=\varphi[g]$.

其次证明 φ 是同态：因为 $\varphi([f][g])=\varphi([f*g])=([p\circ(f*g)],[q\circ(f*g)])=([pf*pg],[qf*qg])=([p\circ f][p\circ g],[q\circ f][q\circ g])=(p_*[f]p_*[g],q_*[f]q_*[g])=\varphi[f]\varphi[g]$.

再证明 φ 是满同态：设 $([f_1],[f_2])\in\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$，令 $f:I\to X\times Y$ 为 $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$，此中 $p\circ f=f_1$，$q\circ f=f_2$，因此 $\varphi[f]=([f_1],[f_2])$.

最后证明 φ 是单同态：设 $\varphi[f]=\varphi[g]$，则 $([p\circ f],[q\circ f])=([p\circ g],[q\circ g])$，因此 $p\circ f\simeq p\circ g$，$q\circ f\simeq q\circ g$. 设 $F_1:I\times I\to X$ 和 $F_2:I\times I\to Y$ 分别是上述的同伦，于是 $F:I\times I\to X\times Y$ 由 $F(t,s)=(F_1(t,s),F_2(t,s))$ 给出 $f\simeq g$，即 $[f]=[g]$. ▌

§4 圆周的基本群和提升定理

我们先考察一些简单空间的基本群.

对 R^n 中的凸集 C，任一闭路 $\alpha:I\to C$，$\alpha(0)=x_0\in C$ 与常值道路 e_{x_0} 是同伦的，因为存在连续映射 $F:I\times I\to C$ 由 $F(t,s)=(1-s)\alpha(t)+se_{x_0}(t)$ 所决定. 因此 $\pi_1(C,x_0)=\{0\}$(平凡群).

现在考察圆周的情况，因为圆周上的闭路可以直观地看为有限长的绳子绕圆周若干圈. 如图 1-12 所示，单位圆周 S^1 可看为复平面 C 上的子集. 以 1 为起点绕 S^1 若干(设为 n)圈的闭路作为 $\alpha:I\to S^1$ 的像可以看为将单位线段 I 放大 n 倍，$\gamma_n:I\to R^1$ 由 $\gamma_n(t)=nt\,(n\in Z)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 所决定，与 $p:R^1\to S^1$ 由 $p(t)=exp(2\pi it)$，$p(n)=1$，$n\in Z$ 所决定的合成映射，即 $\alpha=p\circ\gamma_n:I\to S^1$.

从此可知，S^1 的闭路等价类与绕 S^1 的圈数(依反时针或顺时针方向所绕的圈数分别冠以正号或负号)构成一一对应．因此 $\pi_1(S^1,1)\approx Z$．

为了给出上述结论的证明，我们需要下述的一些结果和概念．

引理　设 U 是 $S^1\setminus\{1\}$ 中的任一开子集，则 $p^{-1}(U)$ 是 R 上不相交开集 $\{V+n \mid V$ 是 R 中开子集，$n\in \mathbf{Z}\}$ 的并集，其中每个开集在 p 之下与 U 同胚．

证明　设 $U=\{\exp(2\pi it),0\leqslant a<t<b\leqslant 1\}$ 是 $S^1\setminus\{1\}$ 中的开集，$V=(a,b)\subset R$ 是 U 在 p 之下的一个原像．而 $V+n=(a+n,b+n)(n\in Z)$ 仍然是在 p 之下 U 的原像，每个 $V+n$ 与 U 在 p 之下都是连续的满单射．另方面，对 R 中任意闭集 W，它是紧致的，因此在 p 之下是 S^1 中的紧致集．由于 S^1 是 Hausdorff 空间，所以紧致集 $p(W)$ 是闭的．从此即知每个 $V+n$ 与 U 在 p 之下是同胚的．▌

推论　如果 $f:I\to S^1$ 非满射，则 f 是零伦的．

证明　设 $x\notin f(I)$，则 $S^1\setminus\{x\}$ 是 S^1 中的开集；而且有某个 $s\in I$ 使 $x=\exp(2\pi is)$，于是 $S^1=\{\exp(2\pi it),s\leqslant t\leqslant 1+s\}$．因为开集 $S^1\setminus\{x\}$ 在 p^{-1} 之下与(0,1)同胚．而(0,1)是可缩的，所以 f

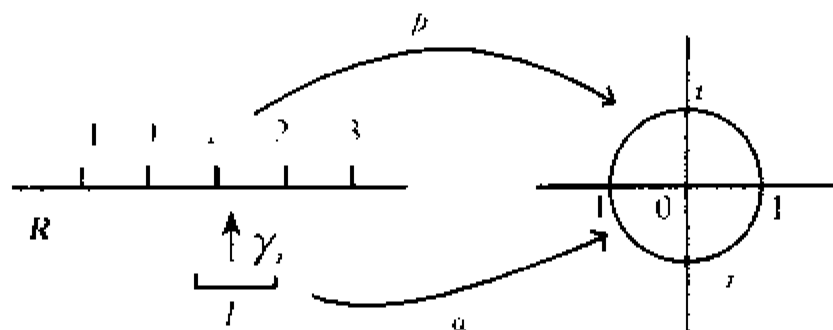


图 1-12

$I \to S^1$ 是零伦的 ▌

定理 (道路提升定理)对于任一条道路 $f: I \to S^1$，以 $f(0) = p \circ \gamma_n(0) = p(x_0) \in S^1$，则存在唯一的提升道路 $\tilde{f}: I \to \boldsymbol{R}$ 满足 $\tilde{f}(0) = x_0 \in \boldsymbol{R}$ 这样的提升道路 $\tilde{f}$ 也称为 f 的**覆盖道路**.

证明 对于 S^1 的任一开覆盖，例如 $\{U_1, U_2\}$，其中 U_1 是从 1 出发以反时针方向沿 S^1 到 $-\iota$ 的开圆弧，而 U_2 是从 -1 到 ι 的开圆弧，则 $U_1 \cup U_2 = S^1$. 于是 $p^{-1}(U_1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+\frac{3}{4})$，$p^{-1}(U_2) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{4})$，其中每个开区间 $(n, n+\frac{3}{4})$ 和 $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{4})$ 在 p 之下分别与 U_1 和 U_2 同胚 $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ 是 I 的开覆盖 因为 I 是紧的，所以存在该覆盖的 Lebesgue 数 ε，我们选取 I 中的有限个点 $\{t_i\}$，$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ 满足 $|t_i, t_{i+1}| < \varepsilon$，$0 \leqslant i \leqslant n-1$ 于是 $f([t_i, t_{i+1}])$ 必落在 U_1 或 U_2 之中. 现定义 $\tilde{f}: I \to \boldsymbol{R}$ 如下：不妨假设 x_0 在 $p^{-1}(U_i)$($i = 1$ 或 2)的某个开集连通分支 W 中，即 $x_0 \in W \subset p^{-1}(U_i) \subset \boldsymbol{R}$. 首先，由于道路连通集的连续像是道路连通的，在 $[t_0, t_1]$ 上定义 $\tilde{f}$ 为 $\tilde{f}_1(t) = (p|_w)^{-1}f(t)$. 假设 $\tilde{f}_k: [t_0, t_1] \to R$ 已定义好，根据道路的连续性，归纳地定义 $\tilde{f}_k [t_0, t_k] \to \boldsymbol{R}$，则 $f([t_k, t_{k+1}]) \subset U_1$ 或 V_2，设 W_{k+1} 是 $\tilde{f}_k(t_k)$ 所属的 $p^{-1}(U_i)$ 的一个分支 因而 f_k 在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上的扩充通过 $f_k(t) = (p|_{W_{k+1}})^{-1}f(t)$ 决定之，满足 $\tilde{f}_k(t_k) \in W_{k+1}$. 于是任一个扩充映射 $\tilde{f}_{k+1}$ 必须把道路连通集 $[t_k, t_{k+1}]$ 映到 W_{k+1} 中. 由于 $W_{k+1} \to U_i$($i = 1$ 或 2)是同胚，由 $\gamma_k = (p|W_{k+1})^{-1}f$ 决定的 $\gamma_k: [t_k, t_{k+1}] \to W_{k+1}$ 满足 $p \cdot \gamma_k = f\big|[t_k, t_{k+1}]$，现在定义

$$\tilde f_{k+1}(t)=\begin{cases}\tilde f_k(t), & t_0\leqslant t\leqslant t_k\\ \gamma_k(t), & t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}\end{cases}$$

由于 $\tilde f_k(t_k)=\gamma_k(t_k)$，根据粘合引理，$\tilde f_{k+1}:[t_0,t_{k+1}]\to R$ 也连续．经过有限次扩充，即确定了道路 $\tilde f: I\to R$．

现证明唯一性．假设 f' 也是满足 $pf'=f$ 而且 $f'(0)=x_0$ 的道路，则道路 $\tilde f-f': I\to R$ 满足 $\tilde f(0)-f'(0)=0$，而且 $p(\tilde f-f')=\dfrac{p\tilde f(t)}{pf'(t)}=1,\ t\in I$．表明 $\tilde f-f'$ 是具常值 1 的道路．而 p 仅将整数映为 $1\in S^1$，所以 $\tilde f(t)-f'(t)$ 等于一个整数，$(t\in I)$．由于 I 是连通的，因此 $\tilde f(t)-f'(t)$ 仅能取一个整数值，即仅能取零值，即 $\tilde f(t)=f'(t)$．▌

根据这个定理，当 f 是 S^1 中以 1 为基点的闭路，设 $\tilde f$ 是满足 $\tilde f(0)=0\in R$ 的 f 的唯一提升道路，这时 $p^{-1}(f(1))=p^{-1}(1)\in Z$，所以 $\tilde f(1)$ 必为整数．

定义　$\tilde f(1)$ 是个整数，称为闭路 f 的度，记为 $\deg f$．

定理　（同伦提升定理）对 S^1 中道路的同伦 $F: I\times I\to S^1$，存在唯一的提升同伦 $\widetilde F: I\times I\to R$ 满足 $p\widetilde F=F$ 和 $\widetilde F(0,0)=x_0\in R$，这样的 $\widetilde F$ 也称为 F 的**覆盖同伦**．

证明　定理的证明与道路提升定理类似．对 S^1 的开覆盖 $\{U_1, U_2\}$，它们在 F 之下的完全逆像是紧致空间 $I\times I$ 的开覆盖，该覆盖存在着 Lebesgue 数 ε．因此存在点列 $\{t_i\}$ 和 $\{s_j\}$；$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1,\ 0=s_0<s_1<\cdots<s_m=1$；使得 F 把任一直径小于 ε 的矩形 $[t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}]$ 映入 $U_i\ (i=1$ 或 $2)$ 之中，不妨假设 x_0 落在 $p^{-1}(U_i)\ (i=1$ 或 $2)$ 的某个开集连通分支 W 之中．定义 $\widetilde F$ 在 $[t_0,t_1]\times[s_0,s_1]$ 为 $\widetilde F(t,s)=(p|_W)^{-1}F(t,s)$．如同构作提升道路那

样，在水平方向依次扩充到 $[t_0, t_{r+1}]\times[s_0, s_1]$ 上去，在扩充过程中注意到相邻小矩形公共边的定义应吻合，这样终于可在条子 $I\times[s_0, s_1]$ 上决定 $\tilde{F}$。然后在 $[t_0, t_1]\times[s_1, s_2]$ 上定义 $\tilde{F}$，注意到在 $I\times[s_0, s_1]$ 与 $[t_0, t_1]\times[s_1, s_2]$ 的公共部分上取值相同。归纳地进行下去，假设 $\tilde{F}$ 已经在 $A=(I\times[s_0, s_k])\cup([t_0, t_i]\times[s_k, s_{k+1}])$ 上定义好，我们要扩充定义域到 $[t_i, t_{i+1}]\times[s_k, s_{k+1}]$ 上去（如图1-13），令 B 是 A 与 $[t_i, t_{i+1}]\times[s_k, s_{k+1}]$ 的公共边界。设 $F([t_i, t_{i+1}]\times[s_k, s_{k+1}])$ 落在 $p^{-1}(U_j)$ $(j=1$ 或 $2)$ 的某个连通分支 W 中，W 是 $p^{-1}(U_j)$ 包含 $\tilde{F}(B)$ 的分支。我们定义 $\tilde{F}$ 在 $[t_i, t_{i+1}]\times[s_k, s_{k+1}]$ 为 $\tilde{F}(t,s)=(p|_W)^{-1}F(t,s)$。由于这样定义的 $\tilde{F}$ 与原先在 A 上定义的 $\tilde{F}$ 在闭集 B 上取值一致，由粘合引理保证 $\tilde{F}$ 的连续性。这样的归纳扩充，把 $\tilde{F}$ 的定义域扩充到整个 $I\times I$ 上去，完成了 $\tilde{F}$ 的构作。

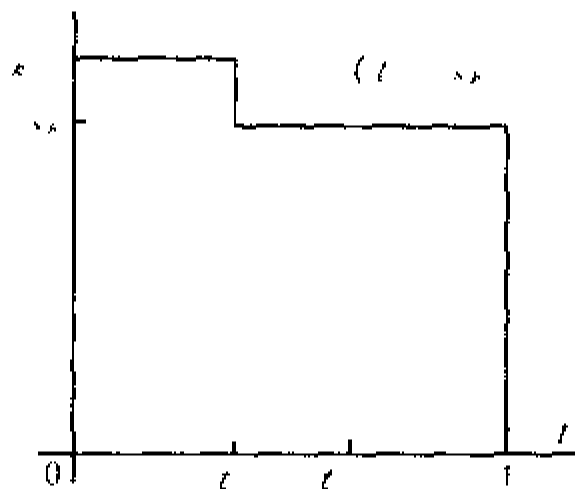


图1-13

这样构作的覆盖同伦 $\tilde{F}$ 满足 $p\tilde{F}=F$，而且 $\tilde{F}(0,0)=\tilde{x}_0$ 是唯一的。假如 $\tilde{F}'$ 是另一个满足同样条件的覆盖同伦，则同伦 $\tilde{F}$ 　F

满足$(\tilde{F}-\tilde{F}')(0,0)=\tilde{F}(0,0)-\tilde{F}'(0,0)=0\in R$，而且 $p(\tilde{F}-\tilde{F}')(t,s)=p\tilde{F}(t,s)/p\tilde{F}'(t,s)=\dfrac{F(t,s)}{F(t,s)}=1$，对一切$(t,s)\in I\times I$成立．所以$\tilde{F}-\tilde{F}'$只能取整数值零，因此$\tilde{F}=\tilde{F}'$．▌

定理 （单值性定理）设f_0与f_1是S^1中以1为基点的等价闭路，如果它们的提升道路具有相同起点，即满足$\tilde{f}_0(0)=\tilde{f}_1(0)$，则$\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$，即它们具有相同的度．

证明 从定理的给定条件，即知f_0与f_1之间有一个相对于$\{0,1\}$的同伦F．根据前面的引理，则存在唯一的提升同伦$\tilde{F}:I\times I\to R$满足$p\tilde{F}=F$而且$\tilde{F}(0,0)=\tilde{f}_0(0)=\tilde{f}_1(0)$．因为$F(t,0)=f_0(t)$，$F(t,1)=f_1(t)$，而且$f_0$、$f_1$都是闭路，所以$F(1,s)=F(0,s)=f_0(0)=f_1(0)$．于是$\tilde{F}(t,0)=\tilde{f}_0(t)$，$\tilde{F}(t,1)=\tilde{f}_1(t)$，这时$\tilde{F}(1,s)$是从$\tilde{f}_0(1)$到$\tilde{f}_1(1)$的道路，因为$p\tilde{F}(1,s)=F(1,s)=1$，$s\in I$，而连续函数$\tilde{F}(1,s)$取值$p^{-1}(f_0(1))\in \mathbf{Z}$．因此$\tilde{F}(1,s)$取固定的整数值，所以$\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$．▌

注 上述定理的逆也成立．设f_0与f_1具相同的度，即$\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$，定义一个同伦$\tilde{F}:I\times I\to R$为$\tilde{F}(t,s)=(1-s)\tilde{f}_0(t)+s\tilde{f}_1(t)$，$(t,s)\in I\times I$．注意到对每个$s\in I$，$\tilde{F}(1,s)$是$\tilde{f}_0(t)$与$\tilde{f}_1(t)$的公共度，因此同伦$p\tilde{F}:I\times I\to S^1$显示$f_0$与$f_1$在$S^1$中是等价的．

定理 $\pi(S^1,1)\approx \mathbf{Z}$

证明 我们定义映射$\varphi:\pi_1(S^1,1)\to \mathbf{Z}$为

$\varphi([f])=\deg(f)=\tilde{f}(1)$，此中$\tilde{f}$是$f$的提升并满足$\tilde{f}(0)$

0. 根据单值性定理，φ 与等价类的代表选择无关，所以 φ 是完全确定的.

先证明 φ 是同态：即 $\deg([f_0]\circ[f_1])=\deg([f_0])+\deg([f_1])$

设 $\tilde f_0$ 与 $\tilde f_1$ 分别是起点在 $0\in R$ 的 f_0 与 f_1 的提升道路，则道路 $\tilde f: I\to R$ 由

$$\tilde f(t)=\begin{cases}\tilde f_0(2t), & 0<t<\dfrac{1}{2}\\ \tilde f_0(1)+\tilde f_1(2t-1), & \dfrac{1}{2}<t<1\end{cases}$$

所决定是起点在 0 的道路 f_0*f_1 的提升道路，因此

$$\begin{aligned}\deg(f_0*f_1)&=\tilde f(1)=\tilde f_0(1)+\tilde f_1(1)=\deg f_0+\deg f_1\\&=\deg[f_0]+\deg[f_1].\end{aligned}$$

再证明 φ 是满射. 设 $n\in \mathbf{Z}$, 则 S^1 的闭路 $\gamma: I\to S^1$ 由 $\gamma(t)=exp(2\pi i nt), t\in I$ 所决定，其覆盖道路 $\tilde\gamma_n: I\to R$ 由 $t\to nt, t\in I$ 所决定，因此 $deg[\gamma]=n$.

最后证明 φ 是单射. 设 $\varphi([f])=0$, 即 $deg(f)=0$ 或 $\tilde f(1)=0$. 由于 R 可缩，所以 $\tilde f\simeq e_0$(R 中在 0 处的常值道路)，因此有一个同伦 $\tilde F: I\times I\to R$ 满足 $\tilde F(t,0)=\tilde f(t)$, $\tilde F(t,1)=0\in R$, 而且 $\tilde F(0,s)=\tilde F(1,s)=0\in R$. 这样的同伦是 $\tilde F(t,s)=(1-s)\tilde f(t)+s\tilde e_0$, 于是 $p\tilde F: I\times I\to S^1$ 满足 $p\tilde F(t,0)=p\tilde f(t)=f(t)$, $p\tilde F(t,1)=p\tilde e_0=1\in S^1$, $p\tilde F(0,s)=p\tilde F(1,s)=1\in S^1$, 因此 $f\simeq e_1$, 此中 e_1 表示 S^1 在 1 处的常值道路. 即 $[f]=e_1\in\pi_1(S^1,1)$. ∎

例 设 $T=S^1\times S^1$, 则 $\pi_1(T)\approx \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$

§5 应　用

定理　设 A 是空间 X 的变形收缩核，且 $x_0\in A$，则 $\pi_1(X, x_0)\approx\pi_1(A, x_0)$

证明　由§3可知，A 与 X 具相同的伦型，所以它们的基本群同构. 在此以另一种方法证明之.

设 $H: X\times I\to X$ 是 X 到 A 上的变形收缩，即 H 满足 $H(x,0)=x\in X, H(x,1)\in A, H(a,t)=a, a\in A, t\in I$

于是当 f 是 X 中以 x_0 为基点的闭路，则 $H(f(t),1)$ 是 A 中以 x_0 为基点的闭路. 我们定义 $h:\pi_1(X, x_0)\to\pi_1(A, x_0)$ 为 $h([f])=[H(f(t),1)]$，于是对 $[f],[g]\in\pi_1(X,x_0)$，

$$h([f][g])=h([f*g])=[H(f*g(t),1)]$$
$$=[H(f(t),1)*H(g(t),1)]=h([f])h([g])$$

所以 h 是一个同态. 而 $H(f(t),1)$ 等价于 $H(f(t),0)$ 作为 X 中的闭路保证 h 是单射. 此外，设 $[\gamma]\in\pi_1(A, x_0)$，则 γ 决定 $\pi_1(X, x_0)$ 的一个同伦类也记为 $[\gamma]$. 由于 H 保持 A 的点不动，因此 $h([\gamma])=H(\gamma(t),1)=[\gamma]$，表明 h 把 $\pi_1(X, x_0)$ 映满 $\pi_0(A, x_0)$. 所以 h 是一个同构. ▌

定理　(Brouwer 不动点定理) n 维球体 D^n 到自身的连续映射至少有一个不动点.

证明　当 $n=1$，这时 1 维球体 D^1 可表为 $x^2\leqslant 1$，它除了一个同胚之外，可用 $I=[0,1]$ 代表之. 这时的问题化为 $f: I\to I$ 必有 $x\in I$ 满足 $f(x)=x$. 如果不然的话，设 $f(x)\neq x, x\in I$

于是存在 $g: I\to\{0,1\}$ 由 $g(x)=\begin{cases}0, & f(x)>x\\ 1, & f(x)<x\end{cases}$，$x\in I$ 所决定.
从 $I\xrightarrow{f} I\xrightarrow{g}\{0,1\}$，这时 $g\circ f: I\to\{0,1\}$ 连续，但是 I 连通，而 $\{0,1\}$ 不连通，得出矛盾，这表明 g 不存在.

当 $n=2$，2 维球体 D^2 可表为 $x_1^2+x_2^2\leq 1$. 如果 $f(x)\neq x$，则从 $f(x)$ 到 x 的连线与 $S^1=\partial D^2$ 交于点 $g(x)$（如图 1-14 所示）. 当 $x\in S^1$，$f(x)\in S^1$. 这时得出 $g(x)=x$. 这样定义的 $g: D^2\to D^2$ 是连续的. 于是我们有下列交换图

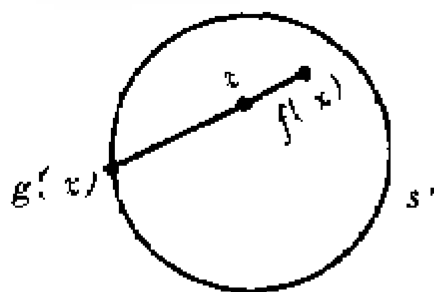
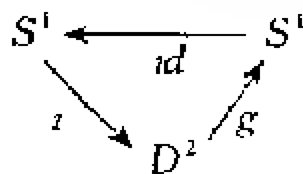


图 1-14



其中 i 是包含映射，id 表明 S^1 上的恒同映射. 因为 g 在 $\partial D^2=S^1$ 上满足 $g(x)=x$，因此有 $g\circ i=id$. 从此得出相应的基本群交换图

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(S^1,1) & \xleftarrow{id_*} & \pi_1(S^1,1)\\ & {\scriptstyle i_*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle g_*} & \\ & \pi_1(D^2,1) & \end{array}$$

亦即 $g_*\circ i_*=id_*$. 由于 D^2 是可缩的，所以 $\pi_1(D^2,1)=\{0\}$，而 $\pi_1(S^1,1)\approx Z$，得出矛盾. 这表明上述的 g 不存在.

对 $n\geq 3$，这时 D^n 的边界集 S^{n-1} 是单连通的，上述证明失效，留到以后再补充证明之. ∎

为了证明下述一个定理，在此先复习一些有关的概念.

设 M 是一个 2 维流形，亦即 M 是一个 Hausdorff 空间，而且它的每一点有一个邻域与 R^2 同胚．如果 M 至少有一点，它有一个邻域与欧氏闭上半平面 R^2_+ 同胚，此中 R^2_+ 是满足下面条件的集合：

$$R^2_+ = \{(x,y)\in R^2 \mid y\geqslant 0\}$$

则称 M 是一个带边的 2 维流形．M 中具有与 R^2 同胚的邻域的点称为 M 的**内点**；而具有与 R^2_+ 同胚的邻域的点称为 M 的**边界点**；内点的集合称为 M 的**内部**，记为 $\mathring{M}$；而边界点的集合称为 M 的**边界**，记为 ∂M．

定理　带边的 2 维流形 M 的内部 $\mathring{M}$ 与边界 ∂M 不相交．

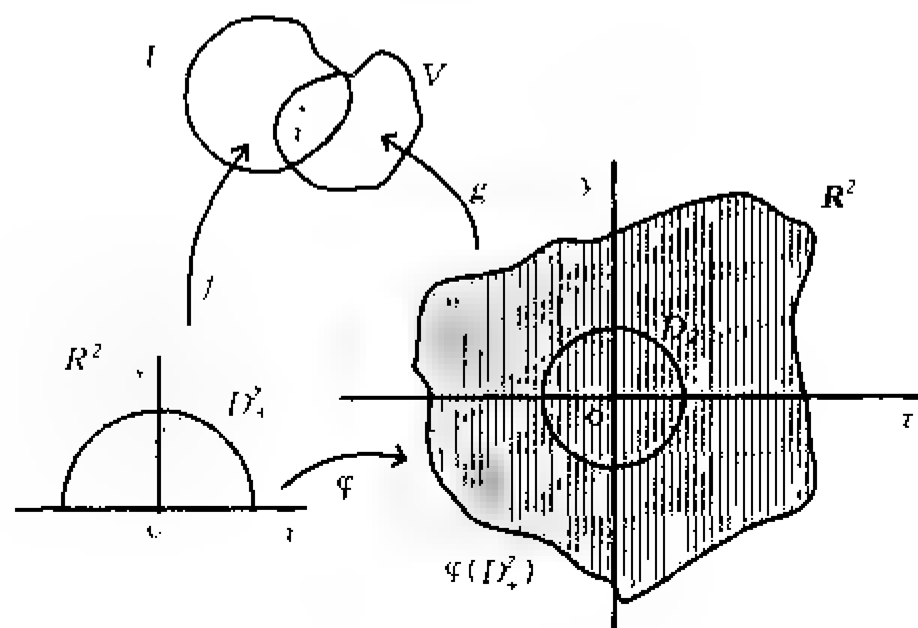


图 1-15

证明　如图 1-15 所示，假如 $\mathring{M}\cap\partial M\neq\varnothing$．设 $x\in\mathring{M}\cap\partial M$，于是存在着点 x 的邻域 U 与 V，它们分别与 R^2_+ 和 R^2 同胚，即存在同胚 f 与 g 满足 $f: R^2_+\cong U$，$g: R^2\cong V$ 而且 $f(O)=g(O)=x$，此中 O 是 R^2_+ 与 R^2 的原点．根据 f 的连续性，存在着以 O 为中心的充分小闭半圆盘 $D^2_+\subset R^2_+$ 使得 $f(D^2_+)\subset U\cap V$，于是 φ

$(D^2_+)=g^{-1}\circ f|_{D^2_+}$ 是 O 在 R^2 中的邻域. 现选取一个以 O 为中心的充分小圆盘 $D^2\subset\varphi(D^2_+)$, 它的边界 ∂D^2 是一个圆周. 设 r 是它的半径, 构作径向投影

$$\vec{r}: R^2-\{O\}\to\partial D^2$$

由 $\vec{r}(y)=r\cdot\frac{y}{|y|}, y\in R^2-\{O\}$ 所决定. 而 $\vec{r}$ 在 $\varphi(D^2_+)-\{O\}$ 上的限制记为 $\vec{r}_1$, 即 $\vec{r}_1=\vec{r}|_{\varphi(D^2_+)-\{O\}}: \varphi(D^2_+)-\{O\}\to\partial D^2$. 设 $i: \partial D^2\to\varphi(D^2_+)-\{O\}$ 是内射, 则有 $\vec{r}_1\circ i=1_{\partial D^2}$, 因此它们的基本群的诱导同态应满足 $\vec{r}_{1*}\circ i_*=1_*: \pi_1(\partial D^2)\to\pi_1(\partial D^2)$, 从而 $\vec{r}_{1*}: \pi_1(\varphi(D^2_+)-\{O\})\to\pi_1(\partial D^2)$ 是满同态. 注意到 $\partial D^2\cong S^1$, 所以 $\pi_1(\partial D_2)\approx \mathbf{Z}$. 但是由于 $\varphi: D^2_+\to\varphi(D^2_+)$ 是同胚, 满足 $\varphi(O)=O$, 因此 $\varphi(D^2_+)-\{O\}\simeq D^2_+-\{O\}$. 由于 $D^2_+-\{O\}$ 是可缩的, 因此 $\pi_1(\varphi(D^2_+)-\{O\})=\{0\}$. 它与 $\pi_1(\partial D^2)\approx Z$ 不可能建立满同态, 这个矛盾显示 $\mathring{M}\cap\partial M=\varnothing$. ▌

命题 设 h 是两个带边的 2 维流形 M_1 与 M_2 之间的同胚, 则 $h(\mathring{M}_1)=\mathring{M}_2$, $h(\partial M_1)=\partial M_2$.

证明 设 $x\in\mathring{M}_1$, 则存在 x 在 M_1 中的邻域 U 和同胚 $f: R^2\cong U$, 这时 $h(U)$ 是 $h(x)$ 在 M_2 中的邻域, 而且 $h\circ f: R^2\cong h(U)$. 因此 $h(x)\in\mathring{M}_2$, 证明了 $h(\mathring{M}_1)\subset\mathring{M}_2$, 同理证明 $h^{-1}(\mathring{M}_2)\subset\mathring{M}_1$, 因此 $\mathring{M}_2=h\circ h^{-1}(\mathring{M}_2)\subset h(\mathring{M}_1)$. 从此得出 $h(\mathring{M}_1)=\mathring{M}_2$. 根据上述定理, $\mathring{M}_i\cap\partial M_i=\varnothing(i=1,2)$, 而且 $M_i=\mathring{M}_i\cup\partial M_i$. 从而得出 $h(\partial M_1)=\partial M_2$. ▌

定理 (代数基本定理)每个非常数复多项式必有一个根.

证明 设非常数多项式为

$$p(z)=a_0z^k+a_1z^{k-1}+\cdots+a_{k-1}z+a_k(k\geqslant1)$$

假如该多项式没有根，即 $p(z)\neq 0, z\in \boldsymbol{C}$. 令 $z=re^{2\pi it}$，此中 $t=\frac{\theta}{2\pi}(0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant t\leqslant 1)$. 现定义 $G: I\times[0,\infty)\rightarrow S^1\subset \boldsymbol{C}$ 为

$$G(t,r)=\frac{p(re^{2\pi it})}{|p(re^{2\pi it})|}\cdot\frac{p(r)}{p(r)}$$

由于 $p(z)$连续，所以 $G(t,r)$连续. 再定义同伦 $F: I\times I\rightarrow S^1$ 为

$$F(t,s)=\begin{cases}G\left(t,\frac{s}{1-s}\right), 0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant s<1;\\ e^{2\pi ikt}, 0\leqslant t<1, s=1\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{s\to 1}F(t,s)=\lim\limits_{s\to 1}G\left(t,\frac{s}{1-s}\right)=\lim\limits_{r\to\infty}G(t,r)=(e^{2\pi it})^k=e^{2\pi ikt}$，所以 F 连续. 这时 $F(t,0)=G(t,0)=1=f_0(t)$, $F(t,1)=e^{2\pi kt}=f_1(t)$, $F(0,s)=F(1,s)=1$. 因此 F 是联系 $f_0(t)=1\in S^1$ 与绕 S^1 转 k 圈的道路 $f_1(t)=e^{2\pi ikt}$的同伦. 而$\deg(f_0)=0$, $\deg(f_1)=k$ 两者的度不相等，除非 $k=0$, 否则是不可能成立的. 这表明当 $k\neq 0$，则这样的同伦 F(因而 G)是不存在的. 也就是说，$p(z)\neq 0$ 的假设不成立.

习　　题

1　设$\Omega(X, x_0)$是以x_0为基点的全体闭路的集合．$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega(X, x_0)$，证明$(\alpha * \beta) * (\gamma * \delta) \sim \alpha * ((\beta * \gamma) * \delta)$.

2　设$\alpha, \beta: I \to X$，它们分别把$\{0, 1\}$映为$\{x_0, x_1\} \subset X$．证明$\alpha \sim \beta$的充要条件是$\alpha * \beta \sim e_{x_0}$.

3　设$a \in (0, 1)$，$\alpha, \beta: I \to X$满足$\alpha(1) = \beta(0)$，$\gamma: I \to X$定义为

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{t}{a}\right), & t \in [0, a] \\ \beta\left(\dfrac{t-a}{1-a}\right), & t \in [a, 1] \end{cases}$$

证明$\gamma \sim \alpha * \beta$.

4．设$\alpha: I \to X$是一条道路，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$．$\alpha_i: I \to X$定义为$\alpha_i(s) = \alpha((1-s)t_{i-1} + st_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，证明$[\alpha] = [\alpha_1] \cdots [\alpha_n]$.

5．设$x_0 \in X$，而X_0是X包含x_0的道路连通分支．证明$\pi_1(X, x_0)$与$\pi_1(X_0, x_0)$同构．

6．证明道路连通空间X是单连通的充要条件是：任何连续映射$f: S^1 \to X$是零伦的．

7　证明道路连通空间是单连通的充要条件是：该空间中任两条具公共端点的道路都是同伦的．

8　给出一个单连通空间但不是可缩空间的例子．

9. 设 $f: X\to Y$ 是连续映射，$f_*: \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, y_0)$，$y_0=f(x_0)$ 由 $f_*([\alpha])=[f\circ\alpha]$，$\forall\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ 所决定是诱导同态. 举例说明：

(i) 当 f 是满射，f_* 可以不是满同态.

(ii) 当 f 是单射，f_* 可以不是单同态.

10. 设 $h: S^1\to X$ 连续，$h_*: \pi_1(S^1, 1)\to\pi_1(X, x_0)$ 是平凡同态，证明 h 是零伦的.

11. 设 $f, g: X\to S^n$ 连续，且不存在 $x\in X$ 使 $f(x)=-g(x)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是对径点，证明 f 与 g 同伦.

12. 设连续映射 $f: X\to S^n$ 非满射，证明 f 是零伦的.

13. 证明可缩空间必定是道路连通的.

14. 证明可缩空间的收缩核是可缩空间.

15. 设 X 到 Y 的连续映射的同伦类集合记为 $[X, Y]$，证明：

(i) $[X, I]$ 仅含一个元素；如果 Y 可缩，则 $[X, Y]$ 仅含一个元素.

(ii) 设 X 可缩，Y 是道路连通空间，则 $[X, Y]$ 仅含一个元素.

16. 设 x_N 和 x_S 分别是 S^N 的北极和南极，证明 $\{x_N, x_S\}$ 不是 S^N 的收缩核.

17. 决定下列各空间的基本群：

Mobius 带；单叶双曲面；椭圆抛物面；双曲抛物面；两个 2 维球面在一点相切.

18. 设 $x_0\in S^1$，证明 $S^1\times\{x_0\}$ 是 $S^1\times S^1$ 的收缩核，但不是变形收缩核.

19. 设 $f_i\simeq g_i: X_i\to Y_i\ (i=1,2)$，则 $f_1\times f_2\simeq g_1\times g_2: X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$，由此证明若 $X_i\simeq Y_i\ (i=1,2)$，则 $X_1\times X_2\cong Y_1\times$

Y_2

20. 下列诸空间偶 X 与 A，证明 A 是 X 的强变形收缩核，其中：

(ⅰ) $X = R^n, A = B^n$；

(ⅱ) $X = B^{n+1} - \{0\}, A = S^n$，

(ⅲ) $X = \{x \in R^n \mid \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}, A = S^n$

21 设 A 是 X 的收缩核，B 是 A 的收缩核，证明 B 是 X 的收缩核

22 对空间(X, A)和(Y, B) （其中 $A \subset X, B \subset Y$）以记号 Y^X 表示 X 到 Y 的连续映射全体 $(Y, B)^{(X,A)} = \{f \in Y^{Z} \mid f(A) \subset B\}$，证明$(Y, B)^{(X,A)}$的同伦是等价性关系，而且空间偶的同伦等价也是等价性关系.

23. $f_0 \simeq f_1 : (X, A) \to (Y, B)$；$g_0 \simeq g_1 : (Y, B) \to (Z, C)$，则 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : (X, A) \to (Z, C)$

第二章　覆盖空间

覆盖空间的概念和性质是拓扑学中一个重要的内容,它与基本群有密切的联系.许多有关覆盖空间的拓扑问题可归结为相应的空间的基本群的代数问题.本章所考虑的拓扑空间,若无特别声明,都是道路连通而且局部道路连通的.

§1　定义和例子

在讨论圆周的基本群时,引进实数轴 R 到复平面 C 上单位圆周 S^1 的拓扑映射,加以推广即导出一般的覆盖空间的概念.事实上,R 就是 S^1 的一个覆盖空间.

定义　设 X 与 $\tilde{X}$ 是拓扑空间,$p:\tilde{X}\to X$ 是连续映射,如果对每点 $x\in X$,都有 x 的道路连通开邻域 V,使得 $p^{-1}(V)$是 $\tilde{X}$ 中一组互不相交的道路连通分支 $\{U_\alpha\}$,而且 $p|U_\alpha: U_\alpha\to V$ 是同胚.我们称 V 被等度地覆盖,每个 U_α 称为 V 上的一片.这时$(\tilde{X},p)$称为 X 的**覆盖空间**,p 称为**覆盖投影**,这时也称 X 为底空间,V 也称为 $x\in X$ 的**可容许邻域或基本邻域**.

从定义,对 X 上的任一点 x,$p^{-1}(x)$是离散的,而且由于 p 是局部同胚,所以 $\tilde{X}$ 与 X 的局部性质是相同的.

在此证明两个重要的事实.

定理 1 定义中的 U_α 是开的.

证明 这个定理表明空间是局部道路连通的一个充要条件是:开集的每个道路连通分支是开的.

设 Y 是局部道路连通空间, U 在 Y 中是开的, 而 C 是 U 的道路连通分支. 设 $y\in C$, 可取 y 的道路连通邻域 $V\subset U$. 由于 C 是 U 中含 y 的最大道路连通集, 所以 V 必落在 C 中, 因此 C 是开的.

反之, 如果 Y 中开集的道路连通分支是开的, 对 $y\in Y$ 和 y 的邻域 U, 设 C 是 U 中含 y 的最大连通分支, 由于已知它是开的, 所以 Y 的每点有个开邻域, 它是道路连通的, 因此 Y 是局部道路连通的. ∎

定理 2 覆盖投影 $p:\tilde{X}\to X$ 是开映射.

证明 设 U 是 $\tilde{X}$ 中的开集, 我们要证明 $p(U)$ 在 X 中是开的. 设 U 中一点 $\tilde{x}$ 满足 $p(\tilde{x})=x$, 由于 p 是覆盖投影, 设 V 是 x 的一个基本邻域, W 是 $p^{-1}(V)$ 包含 $\tilde{x}$ 的道路连通分支. 由于 $\tilde{X}$ 是局部道路连通的, 根据定理 1 即知 W 在 $\tilde{X}$ 中是开的. 由于 p 将 W 同胚地映到 V 上, 因此 p 将开集 $W\cap U$ 映到 X 中的开子集 $p(W\cap U)$. 从此 $x\in p(W\cap U)$ 而且 $p(W\cap U)$ 是落在 $p(U)$ 中的一个开集. 由于 x 是 $p(U)$ 中任一点, 因此 $p(U)$ 是开集的并, 也是一个开集, 证明了 p 是开映射.

注 对连续映射 $f:X\to Y$, 如果每点 $x\in X$, 都有开邻域 V 使得 $f(V)$ 在 Y 中是开的, 而且 $f|_V$ 是 V 与 $f(V)$ 的同胚, 则称 f 是**局部同胚的**. 例如 X 的开子集到 X 的包含映射是局部同胚的. 两个局部同胚的合成也是局部同胚. 然而即使 f 是局部同胚而且是满射, 却不一定是覆盖投影. 例如 $f:(0,10)\to S^1$ 由 $f(t)=(\cos t,$

$\sin t$)所决定，它是局部同胚，但$((0,10),p)$不是S^1的覆盖空间.一般而言，如果$(\tilde{X},p)$是X的覆盖空间，而V是X的连通真子集，则$p|V$是局部同胚，然而$(V,p|V)$不是X的覆盖空间.

例1　$p: R\to S^1$由$p(t)=\cos(2\pi t)+i\sin(2\pi t)$, $t\in R$所给定，则(R,p)是$S^1\subset \boldsymbol{C}$的覆盖空间.$S^1$的任一开弧的道路连通分支$U=(-i,i)$(从$-i$到$i$的一段开圆弧)，则$p^{-1}(U)=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n-\frac{1}{4},n+\frac{1}{4})$，它的每个道路连通分支$W=(n-\frac{1}{4},n+\frac{1}{4})$，$p|_W\cong U$.

例2　空间X到自身的恒同映射$id: X\to X$，则(X,id)是X的覆盖空间，id是覆盖投影.

例3　在复平面$\boldsymbol{C}$上，映射$q_n: S^1\to S^1$由$q_n(z)=z^n$, $z\in S^1$所决定，此中z^n是复数z的n次幂，n是任一正整数.则(S^1,q_n)是S^1的覆盖空间.设U是S^1上张角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$的开弧，$x\in U$；则$q_n^{-1}(U)$由$n$个张角为$\frac{\theta}{n}$的开弧所组成，每段开弧包含$x$的一个$n$次根，$q_n$将它同胚地映到$U$上去.

例4　实的2维射影平面$\boldsymbol{R}P^2$定义为$S^2/\sim$；此中的等价关系$\sim$是S^2上对径点的等同，于是定义$p: S^2\to \boldsymbol{R}P^2$为：当$x,-x\in S^2$是$S^2$上的一对对径点，$p(x)=p(-x)=w\in \boldsymbol{R}P^2$，则$(S^2,p)$是$\boldsymbol{R}P^2$的覆盖空间.设$U$是$S^2$中含点$x$的道路连通开邻域，而且不包含$x$的对径点，则$p(U)$是$\boldsymbol{R}P^2$中含$w$的开集，而$p^{-1}(p(U))$是两个道路连通分支$U$与$U'$.

例5　设$(\tilde{X},p)$是X的覆盖空间，A是X中连通而且道路连通的子集.如果$\tilde{A}$是$p^{-1}(A)$的道路连通分支，则$(\tilde{A},p|_{\tilde{A}})$是$A$

的覆盖空间.

例6 设$(\widetilde{X}, p)$与$(\widetilde{Y}, q)$分别是X与Y的覆盖空间，则$(\widetilde{X}\times\widetilde{Y}, p\times q)$是$X\times Y$覆盖空间，其中$p\times q$定义为$p\times q(\tilde{x}, \tilde{y})=(p\tilde{x}, q\tilde{y})$，$\tilde{x}\in\widetilde{X}$，$\tilde{y}\in\widetilde{Y}$.

例如平面$\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1$到环面$S^1\times S^1$的映射$\pi=p\times p:\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1\to S^1\times S^1$由$\pi(x, y)=(\exp(2\pi ix), \exp(2\pi iy))$，$(x, y)\in\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1$所决定，则$(\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1, \pi)$是$S^1\times S^1$覆盖空间.对$(z_1, z_2)\in S^1\times S^1$，设U是包含$(z_1, z_2)$的开邻域(它是分别包含$z_1$和$z_2$的开弧的乘积)则$\pi^{-1}(U)$是$\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1$中无穷多个开矩形，其中每一个都与$U$同胚.

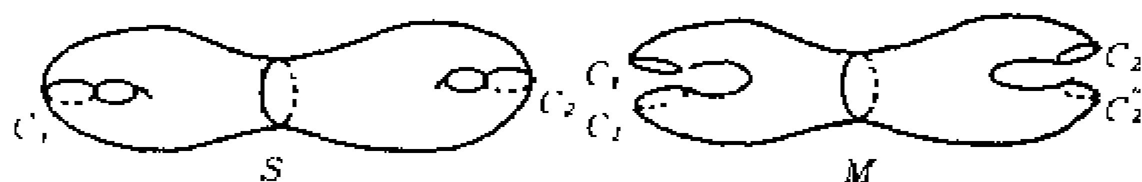


图2-1

例7 设S是双环面.如图2-1所示，它可以看为具C'_1、C''_1和C'_2、C''_2诸边界圆周的带边曲面M将边界圆周C'_1与C''_1粘合，并将C'_2与C''_2也粘合而得到.设$D=\{1,2,\cdots,n\}$是正整数集合赋予离散拓扑构成的拓扑空间.我们定义从$M\times D$构作一个商空间$\widetilde{S}$如下：设$h_i:C'_i\to C''_i(i=1,2)$是同胚，C'_i与C''_i通过$x\in C'_i$与$h_i(x)\in C''_i$粘合为一点.于是我们将圆周$C'_i\times\{j\}$与$C''_i\times\{k\}$通过h_i粘合起来，即将点(x, j)与$(h_i(x), k)$粘合，此中$i=1,2;1\leqslant j, k\leqslant n$.于是得到从$M\times D$的边界圆周成对地粘合$g$构成的商空间$\hat{S}$

例如当 $n=3$ 的情况，可以依下述方式粘合：$C'_1\times\{1\}$ 与 $C''_1\times\{2\}$，$C'_1\times\{2\}$ 与 $C''_1\times\{3\}$，$C'_1\times\{3\}$ 与 $C''_1\times\{1\}$，$C'_2\times\{1\}$ 与 $C''_2\times\{2\}$，$C'_2\times\{2\}$ 与 $C''_2\times\{1\}$，$C'_2\times\{3\}$ 与 $C''_2\times\{3\}$。于是 $\tilde{S}$ 也是紧致曲面. 利用下列交换图

$$\begin{array}{ccc} M\times D & \xrightarrow{g} & \tilde{S} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

导出的连续映射 p，则 $(\tilde{S}, p)$ 是 S 的覆盖空间，而且依边界圆周配对的方式不同，可得出不同的覆盖空间.

例 8 平面上两个相互外切的圆周 C_1 与 C_2，它们分别由下列方程所决定：

$C_1=\{(x,y)\in R^2 \mid (x-1)^2+y^2=1\}$，$C_2=\{(x,y)\in R^2 \mid (x+1)^2+y^2=1\}$，$X=C_1\cup C_2$.

设 $\tilde{X}$ 是通过平面 R^2 上的整数点的水平直线和竖向直线，即 R^2 上点集 $\{(x,y)\in R^2 \mid x$ 或 y 之一或两者都是整数$\}$，定义投影 $p:\tilde{X}\to X$ 为

$$p(x,y)=\begin{cases}(1+\cos(\pi-2\pi x), \sin 2\pi x), & \text{当 } y \text{ 是整数}\\ (-1+\cos 2\pi y, \sin 2\pi y), & \text{当 } x \text{ 是整数}\end{cases}$$

则 $(\tilde{X}, p)$ 是 X 的覆盖空间. 覆盖投影 p 把每条水平直线绕到 C_1 上去，而把每条竖向直线绕到 C_2 上去.

假设 D_n 是圆周 $\{(x,y)\in R^2 \mid (x-1)^2+(y-3n)^2=1\}$（$n$ 为零或正负整数）；L 表示竖向直线 $\{(x,y)\in R^2 \mid x=0\}$，则诸 D_n 两两不相交而且都与 L 相切. 设 $\tilde{X}=L\cup(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} D_n)$，定义 $p':\tilde{X}\to$

X 为将每个 D_n 沿竖向平移、同胚地映到 C_1 上；而将 L 绕到 C_2 上去，即 $p'(0,y)=\left(-1+\cos\frac{2\pi y}{3}, \sin\frac{2\pi y}{3}\right)$；则 $(\tilde{X}, p')$ 也是 X 的覆盖空间.

例 9　对于无穷圆柱螺线 Q 到 S^1 的映射 $q: Q\to S^1$，则 (Q, q) 是 S^1 的覆盖空间. 但是若 Q 是有限螺线，则 q 在端点处不满足定义的条件，因而不是 S^1 的覆盖空间.

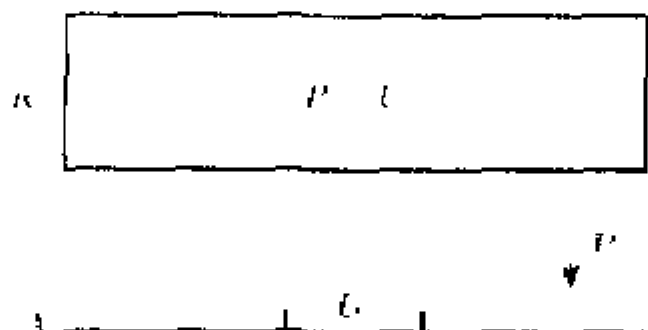


图 2-2

例 10　如图 2-2 所示，其中 R 是矩形，而 A 是线段，p 是投影. 这时对 A 中任一点的开邻域 U，它与 $p^{-1}(U)$ 不同胚，因此 R 不是 A 的覆盖空间.

§2　覆盖空间的基本性质

定理　设 $(\tilde{X}, p)$ 是 X 的覆盖空间，Y 是一个拓扑空间，连续映射 $f, g: Y\to\tilde{X}$ 满足 $pf=pg$，则使得 f 与 g 的像相同的点集是 Y 的既开且闭的子集.

证明　令 $A=\{y\in Y \mid f(y)=g(y)\}$.

先证明 A 是开的：对每点 $y\in A$，设 $pf(y)=x$，于是对于含 x 的基本邻域 U，则有一个 $p^{-1}(U)$ 中含 $f(y)$ 的道路连通分支 V，它是 $\tilde{X}$ 中的开集，因此 $f^{-1}(V)$ 和 $g^{-1}(V)$ 都是 Y 中开集，所以

$f^{-1}(V)\cap g^{-1}(V)$是Y中含y的开集.对任一点$t\in f^{-1}(V)\cap g^{-1}(V)$,由于$f(t)$与$g(t)$都在$V$中,而且$pf(t)=pg(t)$.因为$p$是局部同胚,所以$f(t)=g(t)$;因此$t\in A$.这表明含$y$的开集中任一点在$f$与$g$之下的像都相同.即$A$的任一点均有一个邻域落在$A$中,所以$A$是开的.

再证明A是闭的:用反证法,假如A非闭,设有A的一个极限点y不在A中,则$f(y)\neq g(y)$.然而$pf(y)=pg(y)=x$,所以x有一个邻域$W\subset X$,而$f(y)$与$g(y)$分别属于$p^{-1}(W)$的不同道路连通分支V_0与V_1.然而$y\in f^{-1}(V_0)\cap g^{-1}(V_1)$,后者是$A$中开集.由于$y$是极限点,因此这个开集必含有$A$中除$y$之外的点$t$,满足$f(t)=g(t)$.然而$f(t)$与$g(t)$应是分别属于$V_0$与$V_1$,这与$V_0\cap V_1=\varnothing$发生矛盾,因此$y\in A$,所以$A$也是闭的. ▌

推论 设$(\tilde{X},p)$是X的覆盖空间,Y是连通空间,f,g是Y到$\hat{X}$的连续映射满足$pf=pg$.如果f与g在Y中某一点取值相同,则$f=g$.

证明 因为f与g在Y中取值相同的点集A在Y中是既开且闭的子集.当Y是连通空间,则$A=\varnothing$或$A=Y$.既然f与g在Y中某一点取值相同,即$A\neq\varnothing$,因此$A=Y$,即f与g在Y上每点的取值都相同,因此$f=g$. ▌

定义 设$(\tilde{X},p)$是X的覆盖空间,$f:Y\to X$是连续映射.如果存在连续映射$\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$满足$p\tilde{f}=f$,则称$\tilde{f}$是f的**覆盖映射**,或称$\tilde{f}$是f的**提升**.对道路$\alpha:I\to X$和同伦$F:Y\times I\to X$的覆盖映射$\tilde{\alpha}:I\to\tilde{X}$和$\tilde{F}:Y\times I\to\tilde{X}$,则分别称为$\alpha$和$F$的**覆盖道路**和**覆盖同伦**.

定理 (覆盖道路性质)设$(\tilde{X},p)$是X的覆盖空间,$\alpha:I\to X$

是 X 中以一点 x_0 为起点的道路. 设 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ 满足 $p(\tilde{x}_0)=x_0$, 则存在以 $\tilde{x}_0$ 为起点的 α 的唯一的覆盖道路.

证明: 设 $\alpha(I)$ 包含在 X 中某个基本邻域 U 中, V 是 $p^{-1}(U)$ 包含 $\tilde{x}_0$ 的道路连通分支, 则 α 的覆盖道路 $\tilde{\alpha}$ 即由 $\tilde{\alpha}(t)=(p|_V)^{-1}\alpha(t)$ 给出.

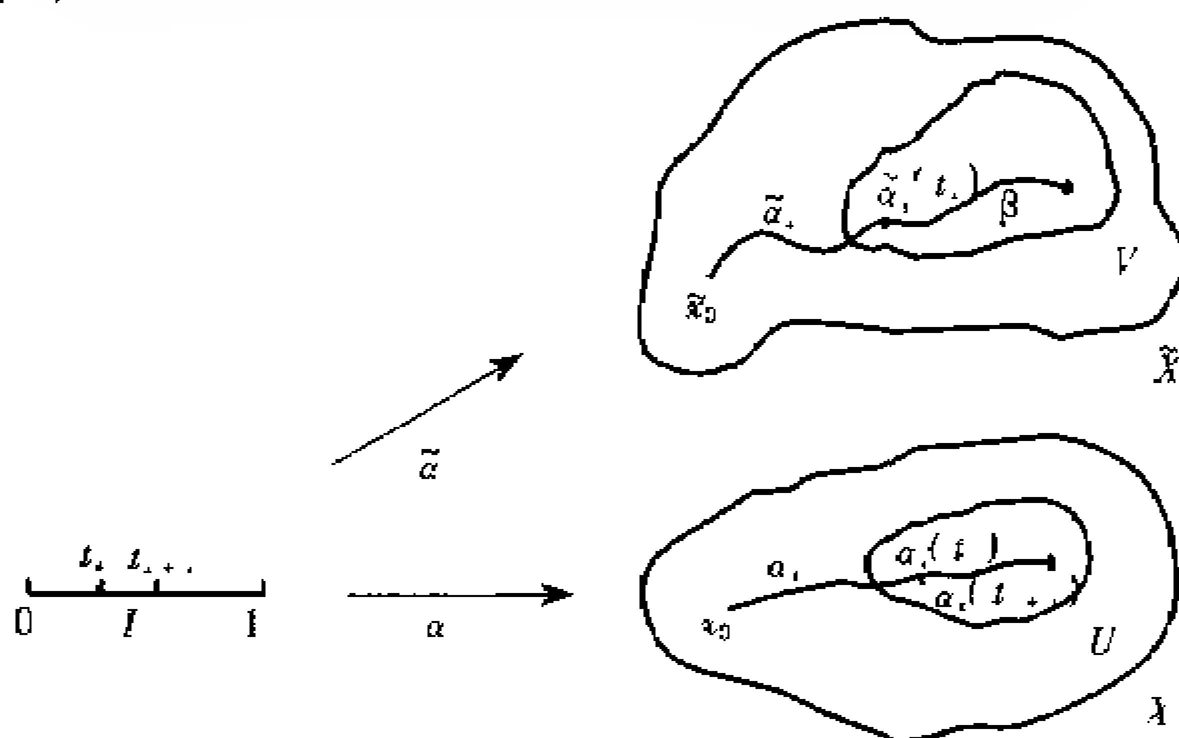


图 2-3

一般而言, 如图 2-3 所示, $\alpha(I)$ 不落在 X 中的一个基本邻域之中. 设 X 的开覆盖是 $\{U_a\}$, 则 $\{\alpha^{-1}(U_a)|U_a$ 是 X 的基本邻域$\}$ 是紧致度量空间 I 的开覆盖. 设该覆盖的 Lebesgue 数为 ε. 将 I 加以分割. 设分割点是 $t_i(i=0,1,\cdots,n)$ 满足 $0=t_0<t_1<\cdots t_{n-1}<t_n=1$, $|t_i-t_{i-1}|<\varepsilon$. 于是 $\alpha([t_{i-1},t_i])$ 必落在 X 的某个基本邻域之中. 用归纳法证明 α 的覆盖道路的存在性. 假设对 $i=0,1,\cdots,j$, 存在连续映射 $\tilde{\alpha}_i:[0,t_i]\to\tilde{X}$ 满足 $p\circ\tilde{\alpha}_i=\alpha|_{[0,t_i]}$, $\tilde{\alpha}_i(0)=\tilde{x}_0$ 已经定义好, 这时 $\tilde{\alpha}_0(0)=\tilde{x}_0$, 而接着的一个映射 $\tilde{\alpha}_{j+1}:[0,

$t_{i+1}]\to\tilde X$ 则由 $\tilde\alpha_i$ 与另一个连续映射 $\beta:[t_i,t_{i+1}]\to\tilde X$ 拼凑得出，其中 β 的定义如下：设 $\alpha([t_i,t_{i+1}])\subset$ 某个基本邻域 U，而 V 是 $p^{-1}(U)$ 包含 $\tilde\alpha_i(t_i)$ 的道路连通分支，由于 $p|_V: V\to U$ 是同胚，令 $\beta(t)=(p|_V)^{-1}\alpha(t)$，这时 $\tilde\alpha_{i+1}:[0,t_{i+1}]\to\tilde X$ 定义为

$$\tilde\alpha_{i+1}(t)=\begin{cases}\tilde\alpha_i(t), & t\in[0,t_i]\\ \beta(t)=(p|_V)^{-1}\alpha(t), & t\in[t_i,t_{i+1}]\end{cases}$$

定义中在 $t=t_i$ 处 $\tilde\alpha_{i+1}(t)$ 的两个取值一致，由粘合引理，$\tilde\alpha_{i+1}(t)$ 连续，而且 $p\tilde\alpha_{i+1}=\alpha|_{[0,t_{i+1}]}$，$\tilde\alpha_{i+1}(0)=\tilde x_0$. 经过有限次如此构作得出 $\tilde\alpha=\tilde\alpha_n:(I,0)\to(\tilde X,\tilde x_0)$ 即所求的覆盖道路.

由于 I 是连通的，根据上面的推论，覆盖道路的唯一性立即得出. ▌

定理 （覆盖同伦性质）设 $(\tilde X,p)$ 是 X 的覆盖空间，而 $F:I\times I\to X$ 是满足 $F(0,0)=x_0$ 的一个同伦. 设 $\tilde x_0$ 是 $\tilde X$ 中的一点满足 $p(\tilde x_0)=x_0$，则存在唯一的覆盖同伦 $\tilde F:I\times I\to\tilde X$ 满足 $\tilde F(0,0)=\tilde x_0$，$p\tilde F=F$.

证明 这是第一章的同伦提升定理的推广，证明方法与上面的定理类似.

设 X 的一个开覆盖为 $\{U_\alpha\}$，则它们在 F 之下的完全原像 $\{p^{-1}(U_\alpha)\}$ 是紧致度量空间 $I\times I$ 的一个开覆盖. 由于该覆盖存在着 Lebesgue 数 ε，因此存在两个点列 $\{t_i\}$ 和 $\{s_k\}$：$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$；$0=s_0<s_1<\cdots<s_{m-1}<s_m=1$，使得 F 把任一个直径小于 ε 的矩形 $[t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}]$ 映到某个 U_α 之中. 不妨假设 $F(0,0)=x_0\in\{U_\alpha\}$ 中某个成员 U，于是 $F([t_0,t_1]\times[s_0,s_1])$ 必落在 U 中. 设 V 是 $p^{-1}(U)$ 包含点 $\tilde x_0\in\tilde X$ 的道路连通分支，我

们定义 $\tilde{F}$ 在 $[t_0,t_1]\times[s_0,s_1]$ 上为 $\tilde{F}(t,s)=(p|_V)^{-1}F(t,s)$ 依次在 t 方向扩充 $\tilde{F}$ 到 $[t_i,t_{i+1}]\times[s_0,s_1]$ 上去，如同上一定理那样，只须将上一定理在相邻线段的端点的取值一致改变为在相邻小矩形的邻边上取值一致，从而在小长条 $I\times[s_0,s_1]$ 上定义了 $\tilde{F}$。然后继续沿 s 方向扩充 $\tilde{F}$，如此归纳地进行下去，假设 $\tilde{F}$ 已经在 $(I\times[s_0,s_k])\cup([t_0,t_i]\times[s_k,s_{k+1}])$ 定义好，我们要把它扩充到小矩形 $[t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}]$；如第一章图 1-12 所示，设 $A=\{(x,y)\in[t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}]\mid x=t_i$ 或 $y=s_k\}$ 是已经定义好的 $\tilde{F}$ 的定义域与 $[t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}]$ 的公共边界，设 $F([t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}])$ 落在 $\mathcal{U}_a$ 中某个成员 U 中，令 $V'\subset p^{-1}(U')$ 为包含 $\tilde{F}(A)$ 的道路连通分支，这时在 $([t_i,t_{i+1}]\times[s_k,s_{k+1}])$ 上定义 $\tilde{F}$ 为 $\tilde{F}(t,s)=(p|_{V'})^{-1}F(t,s)$。于是 $\tilde{F}$ 的连续性从原先定义的 $\tilde{F}$ 与上述的 $\tilde{F}(t,s)$ 在闭集 A 上取值一致而得到保证。这样的构作方式经过有限次即扩充到整个 $[t_0,t_n]\times[s_0,s_m]=I\times I$ 上去，完成了 F 的覆盖同伦 $\tilde{F}$ 的存在性的证明.

根据前面的推论，由于 $I\times I$ 是连通空间，假如有两个覆盖同伦 $\tilde{F}$ 与 $\hat{F}$，由于它们满足 $p\tilde{F}=p\hat{F}=F$ 而且 $\tilde{F}(0,0)=\hat{F}(0,0)$，因此 $\tilde{F}=\hat{F}$，唯一性得到保证. ∎

定理　（单值性定理）设 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间，而且 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 是 $\tilde{X}$ 中具公共起点 $\tilde{x}_0$ 的道路，则 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 等价，当且仅当 $p\tilde{\alpha}$ 与 $p\tilde{\beta}$ 是 X 中的等价道路。特别当 $p\tilde{\alpha}$ 与 $p\tilde{\beta}$ 等价，则 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 必具相同的终点.

证明　设 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 等价，它们之间的同伦是 F，则 pF 是 $p\tilde{\alpha}$ 与 $p\tilde{\beta}$ 之间的一个同伦，因此 $p\tilde{\alpha}$ 与 $p\tilde{\beta}$ 等价．另方面，设 x_0 与 x_1 分别是道路 $p\tilde{\alpha}$ 与 $p\tilde{\beta}$ 的公共起点和终点．当 $p\tilde{\alpha}$ 与 $p\tilde{\beta}$ 等价，设 $H: I\times I\to X$ 是它们之间的同伦，即满足 $H(t,0)=p\tilde{\alpha}(t)$，$H(t,1)=p\tilde{\beta}(t)$，$H(0,s)=x_0$，$H(1,s)=x_1$，$t\in I$．根据覆盖同伦性质定理，存在着 H 的覆盖同伦 $\tilde{H}$ 满足 $\tilde{H}(0,0)=\tilde{x}_0$．这时 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{H}(t,0)$ 都是 $p\alpha$ 的覆盖道路而且在 $t=0$ 处具公共点 $\tilde{x}_0$．根据前面的推论得出 $\tilde{H}(t,0)=\tilde{\alpha}(t)$．同理得出 $\tilde{H}(t,1)=\tilde{\beta}(t)$．剩下的是指明 $\tilde{H}(0,s)$ 和 $\tilde{H}(1,s)$ 都是常值道路．因为 $\tilde{H}(0,s)$ 是满足 $\tilde{H}(0,0)=\tilde{x}_0$ 的常值道路 $H(0,s)$ 的提升，由于常值道路的唯一提升是常值道路，因此 $\tilde{H}(0,s)$ 必为取值 $\tilde{x}_0$ 的常值道路．同理可知 $\tilde{H}(1,s)$ 也是常值道路，它的唯一取值 $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{H}(1,s)=\tilde{H}(1,1)=\tilde{\beta}(1)$．因此 $\tilde{H}$ 是 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 的同伦，亦即 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 是等价的．▌

定理　设 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间，则对一切 $x\in X$，集合 $p^{-1}(x)$ 具相同的基数．

证明　我们只须证明对 X 中任两点 x_0，x_1，离散点集 $p^{-1}(x_0)$ 与 $p^{-1}(x_1)$ 之间建立一一对应即可．为此，设 α 是连接从 x_0 到 x_1 的道路，于是对任一点 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，则 $\tilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为起点的 α 的提升道路 $\tilde{\alpha}$ 是唯一的，它满足 $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{x}_0$ 而且 $p\tilde{\alpha}=\alpha$．设 $\tilde{\alpha}$ 的终点是 $\tilde{x}_1$，它是唯一的．因此得出 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 唯一地对应着 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$．另一方面，由 $\tilde{\alpha}$ 的逆道路 $\alpha_1(s)=\tilde{\alpha}(1-s)$，$s\in I$ 得出 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$ 到 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 的对应是一一的．因此 $p^{-1}(x_0)$ 与 $p^{-1}(x_1)$ 之间建立一一对应．▌

定义　设$(\widetilde{X}, p)$是 X 的覆盖空间，则集合 $p^{-1}(x)$，$x\in X$ 的公共基数称为该覆盖空间的**片数**或**层数**，具有 n 片的覆盖空间称为 n **重覆盖**

例　(S^2, p)是 RP^2 的二重复覆；而(R, p)是 S^1 的无限重覆盖

§3　覆盖空间的基本群

首先要考查的是空间 X 及其覆盖空间$(\widetilde{X}, p)$的基本群之间的关系. 对 $\widetilde{X}$ 中选取的基点$\tilde{x}_0$，设 $p(\tilde{x}_0)=x_0\in X$，于是当 $\tilde{\alpha}$ 是 $\widetilde{X}$ 中以$\widetilde{x_0}$为基点的闭路，则 $p\tilde{\alpha}$ 是 X 中以 $x_0=p(\widetilde{x_0})$ 为基点的闭路，而且当 $\alpha\sim\beta$，则 $p\tilde{\alpha}\sim p\tilde{\beta}$，因此 p 诱导出 $\widetilde{X}$ 和 X 的基本群之间的同态 p_*，即

$$p_*:\pi_1(\widetilde{X}, x_0)\to\pi_1(X, x_0)$$

由 $p_*([\tilde{\alpha}])=[p\circ\tilde{\alpha}]$，$[\tilde{\alpha}]\in\pi_1(\widetilde{X}, x_0)$所决定.

定理　诱导同态 p_* 是单同态

证明　设$[\tilde{\alpha}]$，$[\tilde{\beta}]\in\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$，假如 $p_*([\tilde{\alpha}])=p_*([\tilde{\beta}])$，$p\tilde{\alpha}\sim p\tilde{\beta}$，根据单值性定理，则 $\tilde{\alpha}\sim\tilde{\beta}$ 因此$[\tilde{\alpha}]=[\tilde{\beta}]$. ▌

定理　X 中以 x_0 为基点的闭路 α 可以提升为 $\widetilde{X}$ 中以$\tilde{x}_0$($\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$)为基点的闭路，其充要条件是$[\alpha]\in p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$.

证明　这个定理是道路提升定理的特别情况的另一种形式.

先证明必要性：设 X 中以 x_0 为基点的闭路可提升为 $\widetilde{X}$ 中以

$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$为基点的闭路$\tilde{\alpha}$，则$\alpha = p\circ\tilde{\alpha}$，因此$[\alpha]=[p\circ\tilde{\alpha}]=p_*[\tilde{\alpha}]\in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$.

充分性的证明：设$[\alpha]\in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$，则可找到$\tilde{X}$中以$\tilde{x}_0$为基点的闭路$\beta$，满足$\alpha$与$p\circ\beta$是同伦的.选取这两个闭路间的同伦$F: I\times I\to X$满足$F(t,0)=\alpha(t)$，$F(t,1)=p\circ\beta(t)$，$F(0,s)=F(1,s)=x_0$$(0\leqslant t\leqslant 1)$，$(0\leqslant s\leqslant 1)$.于是存在$F$的提升$\tilde{F}$满足$p\circ\tilde{F}=F$，此中$\tilde{F}$是$F$的覆盖同伦，满足$\tilde{F}(0,0)=\tilde{x}_0$.于是$p\tilde{F}(t,1)=F(t,1)=p\circ\beta$，$\tilde{F}(0,s)=\tilde{F}(1,s)=\tilde{x}_0$，所以$\beta$是$\alpha$的提升道路 ▌

注　X中的闭路可以得出$\tilde{X}$中的提升闭路，也可以提升为具不同端点的道路，上述定理保证当β是α的提升时，前者具相同的端点

设$\tilde{x}_0$与$\tilde{x}_1$是$\tilde{X}$中满足$p(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_1)=x_0\in X$的点，于是有单同态

$$p_*:\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0),$$

$$p'_*:\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)\to\pi_1(X,x_0),$$

我们要考查这样的两个同态的像之间的关系.为此，我们需要下述的代数概念

注　设G是一个群，G_1与G_2是G的子群，如果存在$g\in G$使得$G_1=g^{-1}G_2g$，则称G_1与G_2是**共轭的**.G中子群是共轭的关系是一种等价性关系.我们称G的子群的每个等价类是一个**子群共轭类**.

定理　设$(\tilde{X}, p)$是X的覆盖空间，$x_0\in X$，则对任一点$\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$，诸子群$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})\subset\pi_1(X,x_0)$正是$\pi_1(X,x_0)$的一个子群共轭类．亦即对$\tilde{X}$中不同的基点$\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$的基本群，在$p_*$之下无非是$\pi_1(X,x_0)$的共轭子群．

证明　设$\tilde{x}_0,\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$．因为$\tilde{X}$是道路连通的，所以可选取从$\tilde{x}_0$到$\tilde{x}_1$的一条道路$\tilde{\gamma}: I\to\tilde{X}$．于是对$\tilde{X}$中以$\tilde{x}_0$为基点的闭路$\tilde{\alpha}_0$即得出一条以$\tilde{x}_1$为基点的闭路$\tilde{\alpha}_1=\tilde{\gamma}^{-1}*\tilde{\alpha}_0*\tilde{\gamma}$，这个对应$\tilde{\gamma}$: $\tilde{\alpha}_0\to\tilde{\gamma}^{-1}*\tilde{\alpha}_0*\tilde{\gamma}$决定一个内自同构

$$\tilde{\gamma}_*: \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1),$$

由$\gamma_*[\tilde{\alpha}_0]=[\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\alpha}_0\tilde{\gamma}]$，$[\tilde{\alpha}_0]\in\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$所决定．

亦即　$\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)=\gamma_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$，

因此　$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)=p_*\gamma_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$．

然而从γ_*的定义，$p_*\tilde{\gamma}_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)=[p\gamma]^{-1}\circ p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\circ[p\gamma]$，注意到$[p\gamma]$是$\pi_1(X,x_0)$的成员，所以$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$与$p_*\pi_1(\tilde{X},x_1)$是$\pi_1(X,x_0)$的共轭子群．

再者，还要证明共轭于$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$的$\pi_1(X,x_0)$的任一子群必与$p^{-1}(x_0)$中某个$\tilde{x}$的$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$相等．假设$H$是通过$\pi_1(X,x_0)$某个成员$[\delta]$与$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$共轭的子群，设$\tilde{\delta}$是起点在$x_0$处的$\delta$的唯一覆盖道路，则$\tilde{\delta}$有一个终点$\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$，从上面刚证明过的内容，即有$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})=[p\delta]^{-1}\circ p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\circ$

$[p\delta] = [\hat{\delta}]^{-1} \circ p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \circ [\hat{\delta}] = H$，从而有 $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = H$.

因此集合 $\{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)\}$ 恰是 $\pi_1(X, x_0)$ 的子群共轭类 ▎

定义　上述定理中，$\pi_1(X, x_0)$ 的子群共轭类 $\{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)\}$ 称为由覆盖空间 $(\tilde{X}, p)$ 决定的**共轭类**，也称为覆盖空间 $(\tilde{X}, p)$ 的**示性类**.

例 1　对 S^1 的覆盖空间 (R, p)，此中 p 是指数映射，则 (R, p) 的共轭类是仅含单位元的平凡子群的共轭类.

例 2　对 S^1 的覆盖空间 (S^1, q_n)，此中 q_n 是 n 次幂函数. 当我们用 Z 表示 $\pi_1(S^1, 1)$ 时，则 (S^1, q_n) 的共轭类是 $\{nZ\}$.

事实上，如下列图表所示：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{q_{n*}} & \pi_1(S^1, 1) \\ \deg_\# \downarrow & & \downarrow \deg_\# \\ Z & \xrightarrow{\mathring{q}_n} & Z \end{array}$$

此中由 q_{n*} 诱导的 $Z \to Z$ 的映射记为 $\mathring{q}_n$，即

$\mathring{q}_n = \deg_\# q_{n*} \deg_\#^{-1} : Z \to Z$.

对任意的 $m \in Z$，设 $[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1)$，它的代表 $\alpha(t) = \exp(2m\pi it)$，于是 $\deg_\#([\alpha])$（即 $[\alpha]$ 的度）$= m$，而 $q_n\alpha(t) = \exp(2mn\pi it)$，$\deg_\#([q_n\alpha]) = nm$，所以 (S^1, q_n) 的共轭类是 $\{nZ\}$.

在 §2 考虑了空间 X 的道路可以提升到覆盖空间 $\tilde{X}$ 上去的问题，现在考虑任一空间到 X 中的映射的提升问题.

设 $(\tilde{X}, p)$ 是 X 的覆盖，$\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$，$x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Y 是任一道路连

通且局部道路连通的空间．映射 $\varphi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$，$y_0\in Y$ 满足 $\varphi(y_0)=x_0$．于是考虑在什么条件下，存在映射 $\tilde{\varphi}:(Y,y_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ 使得下面图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X},\tilde{x}_0) \\ & \overset{\tilde{\varphi}}{\nearrow} & \downarrow p \\ (Y,y_0) & \underset{\varphi}{\searrow} & (X,x_0) \end{array}$$

当这样的映射 $\tilde{\varphi}$ 存在，则称 φ 可以提升为 $\tilde{\varphi}$，或说 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 的**提升**．

定理 （映射提升定理）设 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间，Y 是道路连通而且局部道路连通的空间，$y_0\in Y$，$\tilde{x}_0\in\tilde{X}$，$x_0=p(\tilde{x}_0)$．给定一个连续映射 $\varphi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$，$\varphi(y_0)=x_0$，则存在该映射 φ 的一个提升 $\tilde{\varphi}:(Y,y_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$，$\tilde{\varphi}(y_0)=\tilde{x}_0$；当且仅当 $\varphi_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$．而且当这样的 $\tilde{\varphi}$ 存在时，它必是唯一的．

证明 假设 φ 的提升 $\tilde{\varphi}$ 存在，则有下面的相应的图解：

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X},\tilde{x}_0) \\ & \overset{\tilde{\varphi}}{\nearrow} & \downarrow p \\ (Y,y_0) & \underset{\varphi}{\searrow} & (X,x_0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \\ & \overset{\tilde{\varphi}_*}{\nearrow} & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y,y_0) & \underset{\varphi_*}{\searrow} & \pi_1(X,x_0) \end{array}$$

我们要证明的是左图满足 $p\tilde{\varphi}=\varphi$ 的 $\tilde{\varphi}$ 存在的充要条件是右图满足关系式

$$\varphi_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0).$$

必要性.如果 $\tilde{\varphi}$ 存在,则 $p\tilde{\varphi}=\varphi$,从而得出关系式 $p_*\tilde{\varphi}_*=\varphi_*$,因此

$$\varphi_*\pi_1(Y,y_0)=p_*\tilde{\varphi}_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0).$$

充分性 为了给出决定 $\tilde{\varphi}$ 的方式,我们先说明当 φ 的覆盖映射 $\tilde{\varphi}$ 存在的话,则 $\tilde{\varphi}$ 可以从 φ 通过道路的提升确定之.对任一点 $y\in Y$,设 f 是 Y 中连接 y_0 到 y 的道路,即 $f:I\to Y$.则 φf 是 X 中连接 $\varphi(y_0)=x_0$ 到 $\varphi(y)$ 的道路.于是有以 $\tilde{x}_0$ 为起点的唯一覆盖道路 $\widetilde{\varphi f}$.由于假定 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 的提升,所以道路 $\tilde{\varphi} f$ 满足 $p\tilde{\varphi}f=\varphi f$ 而且 $\tilde{\varphi}f(0)=\tilde{\varphi}(y_0)=\tilde{x}_0$,根据覆盖道路的唯一性得出 $\widetilde{\varphi f}=\tilde{\varphi}f$,从而有 $\tilde{\varphi}(y)=\tilde{\varphi}f(1)=\widetilde{\varphi f}(1)$

从此,我们以 $\tilde{\varphi}(y)=\widetilde{\varphi f}(1)$ 决定映射 $\tilde{\varphi}:Y\to\tilde{X}$.这里必须证明 $\tilde{\varphi}(y)$ 与道路 f 的选取无关.设 $f,g:I\to Y$ 都是连接 y_0 到 y 的道路,满足 $f(0)=g(0)=y_0$,$f(1)=g(1)=y$.则 $f*\bar{g}$ 是以 y_0 为基点的闭路.根据假设的条件,我们有 $\varphi_*([f*\bar{g}])\in\varphi_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$,因此存在 $[h]\in\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ 使得 $\varphi_*([f*\bar{g}])=p_*([h])$,所以 $ph\simeq\varphi f*\varphi\bar{g}$.于是得出 $ph*\varphi g\simeq(\varphi f*\varphi\bar{g})*\varphi g\simeq\varphi f$,显然 $h*\widetilde{\varphi g}$ 是 $ph*\varphi g$ 以 $\tilde{x}_0$ 为起点的覆盖道路,所以 $\widetilde{\varphi f}\simeq h*\widetilde{\varphi g}$,$\widetilde{\varphi f}(1)=h*\widetilde{\varphi g}(1)=\widetilde{\varphi g}(1)$,即 $\tilde{\varphi}$ 与连接 y_0 与 y 的道路选取无关.这样的 $\tilde{\varphi}$ 显然满足 $p\tilde{\varphi}=\varphi$.

剩下的还须证明这样的 $\tilde{\varphi}$ 是连续的:如图2-4所示,对 Y 中任一点 y,设 $\tilde{\varphi}(y)=\tilde{x}\in\tilde{X}$ 且 $p(\tilde{x})=x\in X$.设 N 是 $\tilde{x}$ 在 $\tilde{X}$ 中的邻域,取 $x=p(\tilde{x})$ 的基本邻域 V 与 $\tilde{x}$ 在 $p^{-1}(V)$ 之下的道路连通分

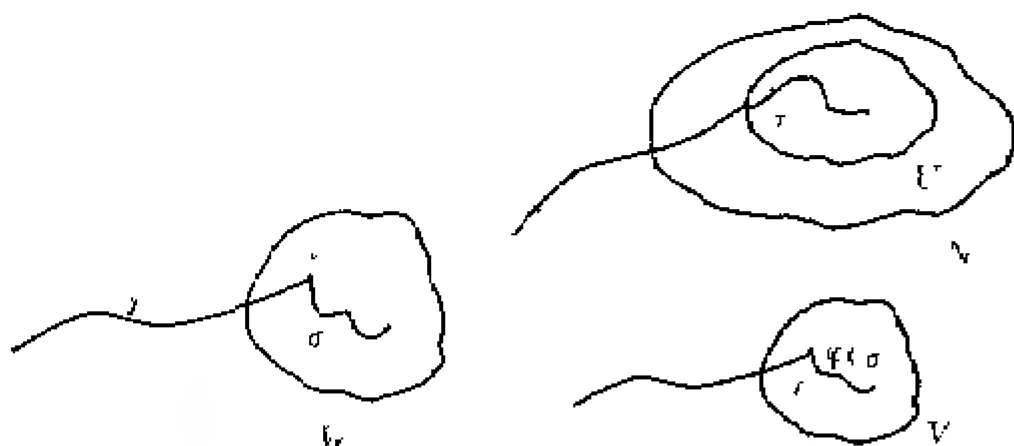


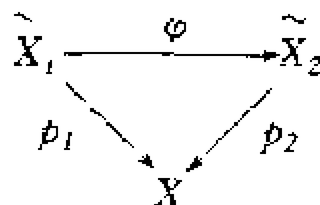
图 2-4

支 U，则 $p|_U: U\to V$ 是同胚. 由于 φ 连续，所以 $\varphi^{-1}p(N\cap U)$ 中包含 y 的道路连通分支 W 必存在. 我们只须证明 $\varphi(W)\subset N$. 为此，对任一点 $z\in W$，取 W 中连接 y 与 z 的道路 σ，设 γ 是连接 y_0 到 y 的道路，把道路 $\varphi(\gamma*\sigma)=\varphi(\gamma)*\varphi(\sigma)$ 提升到 $\widetilde{X}$ 中以 x_0 为起点的道路. 由于 $\varphi\circ\sigma$ 在 $V=p(N\cap U)$ 中，所以它的提升道路的起点是 $\varphi\circ\gamma$ 的提升道路的终点 x. 因为 $p|_{N\cap U}$ 与 V 是同胚，所以提升道路的终点也在 $N\cap U$ 中，当然也在 N 中. ∎

§4 覆盖空间的分类

同一个底空间上可以有不同的覆盖空间，而每个覆盖空间决定底空间基本群的一个子群共轭类. 在此有两个主要的问题：一个是给定底空间 X 的两个覆盖空间 $(\widetilde{X}_1, p_1)$ 和 $(\widetilde{X}_2, p_2)$，它们在何种条件下归为一类. 另一个是对于底空间 X，决定 X 的一切可能的覆盖空间. 这里先引进下述的有关概念.

定义　设$(\widetilde{X}_1, p_1)$，$(\widetilde{X}_2, p_2)$是 X 的两个覆盖空间，当连续映射 $\varphi: \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$满足下图可交换



即 $p_1 = p_2\varphi$，则称 φ 是覆盖空间$(\widetilde{X}_1, p_1)$到$(\widetilde{X}_2, p_2)$的**同态**，或**覆盖映射**.

从定义立即可知，两个同态的合成仍然是一个同态，而且恒同映射也是一个同态.

定义　设连续映射 φ 是覆盖空间$(\widetilde{X}_1, p_1)$到$(\widetilde{X}_2, p_2)$的一个同态，如果存在$(\widetilde{X}_2, p_2)$到$(\widetilde{X}_1, p_1)$的同态 ψ，使得合成同态 $\psi\circ\varphi$ 与 $\varphi\circ\psi$ 分别是$\widetilde{X}_1$ 和 $\widetilde{X}_2$ 到自身的恒同，则称 φ 是一个**同构**. 当两个覆盖空间存在满同构，则称它们是**同构的**. 一个覆盖空间到自身的同构称为**自同构**. 一个覆盖空间的自同构通常也称为该覆盖空间的**覆盖变换**.

从上述定义，即得出下列一些基本性质：

定理 1　同态 $\varphi:(\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$是同构的充要条件是 $\varphi: \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ 为同胚.

证明　当 φ 是同胚，则存在同胚逆 ψ，使得 $\psi\circ\varphi = i_{\widetilde{X}_1}$，$\varphi\circ\psi = i_{\widetilde{X}_2}$，由定义则 φ 是同构. 反之，若 φ 是同构，则有 ψ 使得 $\psi\circ\varphi = i_{\widetilde{X}_1}$，且 $\varphi\circ\psi = i_{\widetilde{X}_2}$. 因此 φ 是单的而且是满的. 由条件 $p_1 = p_2\varphi$，此中 p_1 与 p_2 是连续的单射，所以 φ 是双方连续的，因此 φ 是同胚. ▌

定义　空间 X 的覆盖空间 $(\tilde{X}, p)$ 的全体自同构在合成映射的运算之下构成群，称为**覆盖变换群**，记为 $A(\tilde{X}, p)$.

定理 2　设 φ_0 与 φ_1 是 X 的覆盖空间 $(\tilde{X}_1, p_1)$ 到 $(\tilde{X}_2, p_2)$ 的同态，如果存在一点 $\tilde{x}\in\tilde{X}_1$ 使得 $\varphi_0(\tilde{x})=\varphi_1(\tilde{x})$，则 $\varphi_0=\varphi_1$.

证明　由同态的定义，则有 $p_1=p_2\varphi_0$, $p_1=p_2\varphi_1$. 因此 $p_2\varphi_0=p_2\varphi_1$，而集合 $\{\tilde{x}\in\tilde{X}_1 \mid \varphi_0(\tilde{x})=\varphi_1(\tilde{x})\}$ 是空集或整个 $\tilde{X}_1$，这是由于 $\tilde{X}_1$ 是道路连通空间. 根据假设，存在一点 $\tilde{x}\in\tilde{X}_1$ 使 $\varphi_0(\tilde{x})=\varphi_1(\tilde{x})$，因此 φ_0 与 φ_1 在整个空间 $\tilde{X}_1$ 上均一致. ▌

定理 3　群 $A(\tilde{X}, p)$ 除了 $\tilde{X}$ 到自身的恒同外，它在 $\tilde{X}$ 上的作用不具不动点，即对任一 $\varphi\in A(\tilde{X}, p)$ 且 $\varphi\neq 1_X$，则 φ 没有不动点.

证明　由定理 2 立即得出. ▌

定理 4　设 $(\tilde{X}_1, p_1)$ 与 $(\tilde{X}_2, p_2)$ 都是 X 的覆盖空间，$\tilde{x}_i\in\tilde{X}_i$ $(i=1,2)$ 满足 $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$，则存在 $(\tilde{X}_1, p_1)$ 到 $(\tilde{X}_2, p_2)$ 的同态 φ，使得 $\varphi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$，其充要条件是

$$p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\subset p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$

证明　如下面图表所示

$$\begin{array}{ccc}
(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_1} & (X, x_0) \\
\varphi\downarrow & \nearrow_{p_2} & \\
(\tilde{X}_2, \tilde{x}_1) & &
\end{array}$$

其中 $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)=x_0$

因为当同态 φ 存在，则有 $p_1=p_2\varphi$，对 $[\alpha]\in\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)$，$\varphi_*[\alpha]\in\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$，因此 $p_{1*}[\alpha]=p_{2*}\varphi_*[\alpha]\subset p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ 对任一个 $[\alpha]\in\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ 都成立. 因此 $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\subset p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$.

充分性由上一节的映射提升定理得出. ∎

定理 5　设 $(\widetilde{X}_i,p_i)(i=1,2)$ 是 X 的覆盖空间，$\tilde{x}_i\in\widetilde{X}_i$，$p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$，则存在同构 $\varphi:(\widetilde{X}_1,p_1)\to(\widetilde{X}_2,p_2)$ 满足 $\varphi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$，其充要条件是 $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$.

证明　由定理 4 得知存在同态 φ 的充要条件是 $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\subset p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$. 当 φ 是同构，则存在同态 $\psi:(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)\to(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)$，再由定理 4 得知这时 $p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)\subset p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)$. 因此，$p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$. ∎

推论　设 $(\widetilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间，且 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\in p^{-1}(x_0)$，$x_0=p(\tilde{x}_i)(i=1,2)$，则存在自同构 $\varphi\in A(\widetilde{X},p)$ 使得 $\varphi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$ 的充要条件是 $p_*\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_1)=p_*\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_2)$. ∎

定理　（分类定理）空间 X 的覆盖空间 $(\widetilde{X}_1,p_1)$ 与 $(\widetilde{X}_2,p_2)$ 是同构的充要条件是：对任两点 $\tilde{x}_i\in\widetilde{X}_i$，$p_i(\tilde{x}_i)=x_0\in X(i=1,2)$，子群 $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ 与 $p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ 属于 $\pi_1(X,x_0)$ 的同一子群共轭类.

证明　必要性　设 $(\widetilde{X}_1,p_1)$ 与 $(\widetilde{X}_2,p_2)$ 同构，由定理 5，

$p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$，所以 $\pi_1(X,x_0)$的两个子群共轭类 $\{p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\mid\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)\}$ 与 $\{p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)\mid\tilde{x}_2\in p_2^{-1}(x_0)\}$有一个公共子群 $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$，它们必定相同. 亦即覆盖空间$\tilde{X}_1$与$\tilde{X}_2$的基本群属于底空间基本群的同一个子群共轭类.

充分性. 假如覆盖空间$(\tilde{X}_1,p_1)$与$(\tilde{X}_2,p_2)$的基本群属于底空间基本群的同一个子群共轭类，则可选取$\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)$，$\tilde{x}_2\in p_2^{-1}(x_0)$使得 $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$. 根据§3的映射提升定理，存在连续映射$\varphi$与$\psi$使得下列图表是可交换的，

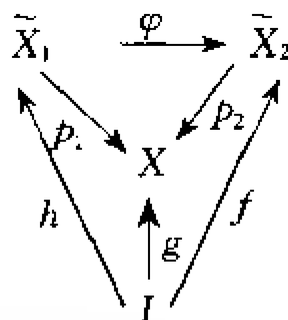
$$
\begin{array}{ccccc}
(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1) & \xrightarrow{\varphi} & (\tilde{X}_2,\tilde{x}_2) & \xrightarrow{\psi} & (\tilde{X}_1,\tilde{x}_1) \\
 & {\scriptstyle p_1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle p_2} & \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\
 & & (X,x_0) & &
\end{array}
$$

其中 $p_1=p_2\varphi$，$p_2=p_1\psi$，$\psi\circ\varphi$，$i_{\tilde{X}_1}$. 因此 $p_1\psi\varphi=p_2\varphi=p_1 i_{\tilde{X}_1}$，而且 $\psi\circ\varphi(\tilde{x}_1)=i_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_1)$. 由提升的唯一性得出 $\psi\circ\varphi=i_{\tilde{X}_1}$. 同理有 $\varphi\circ\psi=i_{\tilde{X}_2}$. 因此$\varphi$是同胚而且满足$p_2\varphi=p_1$. 所以$\varphi$是同构 ▌

注 根据这个定理，对底空间X的基本群$\pi_1(X,x_0)$的一个子群共轭类，除了一个同构之外，完全确定它的一个覆盖空间.

定理6 设$(\tilde{X}_1,p_1)$与$(\tilde{X}_2,p_2)$是X的覆盖空间. 如果 $\varphi:(\tilde{X}_1,p_1)\to(\tilde{X}_2,p_2)$是同态，即满足 $p_1=p_2\varphi$，则$(\tilde{X}_1,\varphi)$是$\tilde{X}_2$的覆盖空间

证明　如下面图解所示，对任一点 $x \in X$，在覆盖投影 p_1, p_2 之下可以选取 X 的基本邻域 U_i ($i=1,2$)，它们都是道路连通开邻域，



则 $U_1 \cap U_2$ 中包含 x 的连通分支 U 是 x 的道路连通开邻域．于是 $p_1^{-1}(U)$ 与 $p_2^{-1}(U)$ 分别是 $\tilde{X}_1$ 和 $\tilde{X}_2$ 中分别包含 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2$ 的道路连通开邻域而且与 U 同胚．因为 φ 是同态，它满足 $p_1 = p_2\varphi$，所以 $\varphi^{-1}p_2^{-1} = p_1^{-1}$；$\varphi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p_1^{-1}(U)$，即 φ 把 $\tilde{X}_2$ 中包含 $\tilde{x}_2$ 的道路连通开邻域同胚地映为 $\tilde{X}_1$ 中含 x_1($p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x \in X$)的道路连通开邻域．

还须证明 φ 是满射：即对任一点 $y \in \tilde{X}_2$ 存在 $x \in \tilde{X}_1$ 满足 $\varphi(x) = y$．为此，选取任一点 $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$，令 $\varphi(\tilde{x}_1) = x_2$，$p_1(\tilde{x}_1) = p_2(x_2) = x \in X$．选取 $\tilde{X}_2$ 中以 $\tilde{x}_2$ 为起点，y 为终点的道路 f，则 $g = p_2 \circ f$ 是 X 中以 x 为起点的道路，于是存在它在 $\tilde{X}_1$ 中以 x_1 为起点的唯一提升道路 h 满足 $p_1 h = g$．设 x 是 h 的终点，则 φh 与 f 具相同的起点而且 $p_2\varphi h = g = p_2 f$，由提升道路的唯一性，$\varphi(x) = y$．▌

在这一节的最后，我们考查覆盖空间的存在性．即对底空间 X 的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的任一子群共轭类 H，是否存在覆盖空间

$(\widetilde{X},p)$，使它的基本群 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})$，$p(\tilde{x})=x_0$，在 p_* 之下恰是给定的子群共轭类 H. 我们先观察一个特殊而简单的情况. 假设覆盖空间 $(\widetilde{X},p)$ 的基本群 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})$ 在 p_* 之下的像 $p_*\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})$ 是 $\pi_1(X,x_0)(p(\tilde{x})=x_0)$ 中仅含单位元的平凡子群的共轭类. 因为 p_* 是单射，所以这时 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})$ 也是平凡群，因此 $\widetilde{X}$ 是单连通空间. 从此，对 $x_0\in X$，设 $\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$，U 是 x_0 的基本邻域，$V=p^{-1}(U)$ 包含 $\tilde{x}$ 的道路连通分支，因而有下列的可交换图表：

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p|_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow[i]{} & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(V,\tilde{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}) \\ {\scriptstyle (p|_V)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi_1(U,x_0) & \xrightarrow[i_*]{} & \pi_1(X,x_0) \end{array}$$

其中 i 是包含映射. 由于 $p|_V$ 是同胚，$(p|_V)_*$ 是同构. 当 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})$ 是平凡群，则 i_* 是平凡同态. 于是对任意的 $[\sigma]\in\pi_1(U,x_0)$，$i_*([\sigma])$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的单位元，这表明 x_0 有个连通邻域 U 使得 U 中以 x_0 为基点的闭路在 X 中等价于常值闭路. 这就是要求底空间应具有的特性，籍以保证 $\pi_1(X,x_0)$ 的每个子群 H 都存在相应的覆盖空间 $(\widetilde{X},p)$ 满足 $p_*\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})=H$，$p(\tilde{x})=x_0$. 我们将在后面证明覆盖空间的存在性定理.

定义 对拓扑空间 X，如果对任意的 $x\in X$，都存在 x 的邻域 U，使得包含映射 $i:U\to X$ 的诱导同态 $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ 是平凡同态，则称 X 是**半局部单连通空间**.

例 如图 2-5 所示，设 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$，此中 C_n 是中心在 $(\frac{1}{n},0)$，半径为 $\frac{1}{n}$ 的圆周. 则在 $(0,0)$ 处不存在上面定义中的邻域，

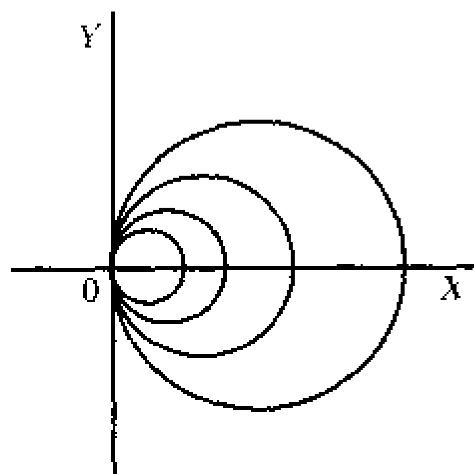


图 2-5

所以 X 不是半局部单连通空间.

定理 (覆盖空间的存在性定理) 设 X 是道路连通、局部道路连通而且半局部单连通的拓扑空间, $x_0\in X$; 则对 $\pi_1(X,x_0)$ 的任意子群 H, 必存在道路连通空间 $\tilde{X}$ 和覆盖投影 $p:\tilde{X}\to X$, 使得对每个 $\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$, $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})=H$. 亦即 $\{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})\mid\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)\}$ 是 H 的共轭类.

证明 我们先构作一个点集 $\tilde{X}$: 任取一点 $x_0\in X$, 以 x_0 为起点的全体道路的集合记为 $\mathscr{A}$, 在 $\mathscr{A}$ 中规定等价关系为: 当 $\sigma,\tau\in\mathscr{A}$, 则 $\sigma\sim\tau$ 当且仅当 $\sigma(1)=\tau(1)$ 而且 $[\sigma*\bar{\tau}]\in H$, 我们记 σ 的等价类为 σ^*, 即 $\sigma^*=\{h\circ[\sigma]\mid h\in H,\sigma\in\mathscr{A}\}$. 令 $\tilde{X}=\{\sigma^*\mid\sigma\in\mathscr{A}\}$, $p:\tilde{X}\to X$ 定义为 $p(\sigma^*)=\sigma(1)$, $\sigma^*\in\tilde{X}$, 于是从 X 的道路连通性可知 $p:\tilde{X}\to X$ 是满射.

现在定义 $\tilde{X}$ 的拓扑: 由于 X 是局部道路连通空间, 对任一个 $\sigma\in\mathscr{A}$, 则 $\sigma(1)$ 的道路连通开邻域 U 必存在(如图 2-6 所示). 设 ρ 是以 $\sigma(1)$ 为起点的道路. 如果 $\sigma^*=\tau^*$, 则有 $(\sigma*\rho)^*=(\tau*\rho)^*$. 令 $B(U,\sigma)=\{(\sigma*\rho)^*\mid\rho$ 是 U 中以 $\sigma(1)$ 为起点的道路$\}$, 显然 B 非空, 因为 $\sigma^*\in B(U,\sigma)$. 而且对任一个 $\tau^*\in B(U,\sigma)$, 则有 $B(U,\sigma)=B(U,\tau)$. 在此验证子集族 $\mathscr{B}=\{B(U,\sigma)\mid\sigma$ 是以起

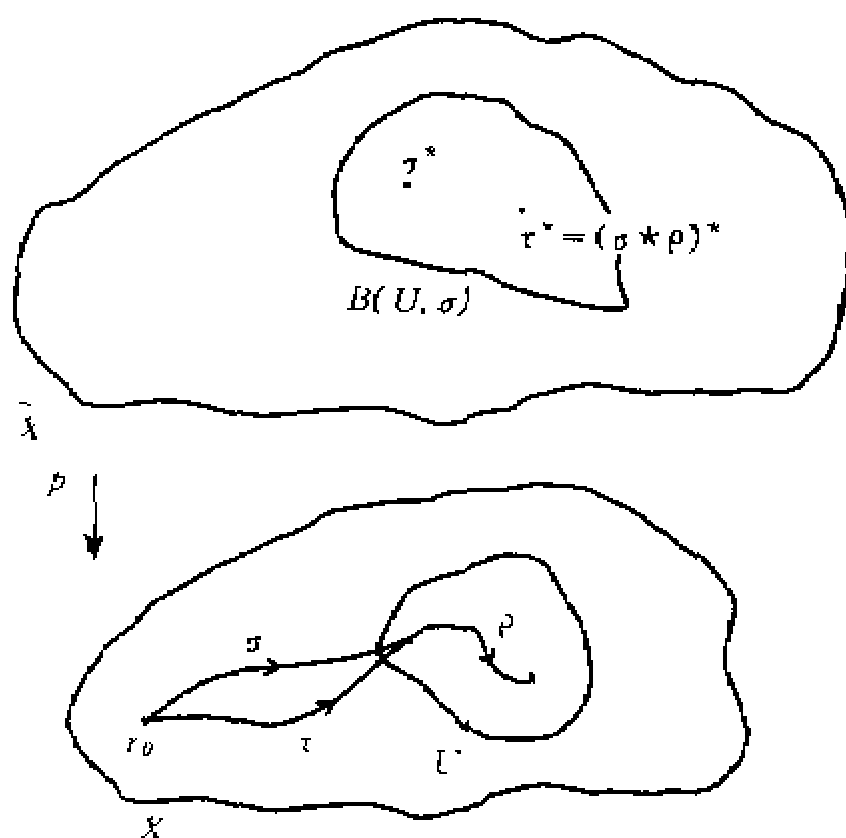


图2-6

点为 $x_0\in X$ 的道路，U 是含 $\sigma(1)$ 的道路连通开邻域}是 $\tilde{X}$ 上一个拓扑 $\mathcal{T}$ 的拓扑基. 假设 $B(U_1,\sigma_1), B(U_2,\sigma_2)\in\mathscr{B}$，这时对任一点 $\tau^*\in B(U_1,\sigma_1)\cap B(U_2,\sigma_2)$，$\tau(1)\in U_1\cap U_2$，由 X 的局部道路连通性，存在 $\tau(1)$ 的道路连通开邻域 $V\subset U_1\cap U_2$，因此存在 $B(V,\tau)\subset B(U_1,\tau)\cap B(U_2,\tau)=B(U_1,\sigma_1)\cap B(U_2,\sigma_2)$，它也是 $\mathscr{B}$ 的成员. 于是以 $\mathscr{B}$ 为拓扑基，在 $\tilde{X}$ 上构作拓扑使 $\tilde{X}$ 成为一个拓扑空间.

其次要证明由 $p(\sigma^*)=\sigma(1)$ $(\sigma^*\in\tilde{X})$ 所定义的 $p:\tilde{X}\to X$ 是覆盖投影：首先，$\mathscr{B}$ 的成员 $B(U,\sigma)$ 在 p 之下的像 σ 是 X 的开集.

所以 p 是开映射. 其次, 对任一点 $\sigma^* \in \widehat{X}$, 设 $p(\sigma^*)$ 的一个邻域为 W, 而 U 是 $p(\sigma^*)=\sigma(1)$ 的道路连通开邻域且落在 W 中, 所以 $B(U,\sigma)$ 是 σ^* 的邻域而且满足 $p(B(U,\sigma))=U\subset W$, 因此 p 在 σ^* 处连续. 对每点 $x_1\in X$, 可选取 x_1 的一个道路连通开邻域 U 使得包含映射 $i: U\to X$ 诱导出平凡同态 $i_*: \pi_1(U,x_1)\to\pi_1(X,x_1)$. 对每个 $B(U,\sigma)$, $p(B(U,\sigma))=U$, 所以 $\bigcup_{\substack{\sigma\in\mathscr{A}\\ \sigma(1)=x_1}} B(U,\sigma)\subset p^{-1}(U)$. 另一方面, 对 $\tau^*\in p^{-1}(U)$, 则 $\tau(1)\in U$, 于是可选取 U 中连接 $\tau(1)$ 到 x_1 的道路 ρ, 令 $\sigma=\tau*\rho$, 则 $\tau\sim\sigma*\overline{\rho}$, $\tau^*=(\sigma*\overline{\rho})^*\in B(U,\sigma)$, 所以 $p^{-1}(U)\subset\bigcup_{\substack{\sigma\in\mathscr{A}\\ \sigma(1)=x_1}} B(U,\sigma)$. 因此证明了 $p^{-1}(U)=\bigcup_{\substack{\sigma\in\mathscr{A}\\ \sigma(1)=x_1}} B(U,\sigma)$. 假如 $\tau\in B(U,\sigma_1)\cap B(U,\sigma_2)$, 则有 $B(U,\sigma_1)=B(U,\sigma_2)=B(U,\tau)$. 因此, 对不同的 σ, 相应的 $B(U,\sigma)$ 是不相交的. 由于 p 是连续的开满射, 剩下的是验证 $p|_{B(U,\sigma)}: B(U,\sigma)\to U$ 是双射, 亦即证明它是单射即可. 从而 $p|_{B(U,\sigma)}$ 是同胚. 为此, 设 ρ_1,ρ_2 是 U 中以 $\sigma(1)$ 为起点的道路, 满足 $p((\sigma*\rho_1)^*)=p((\sigma*\rho_2)^*)$. 于是 $\rho_1(1)=\rho_2(1)$. 因为 $\pi_1(U,x_1)\to\pi_1(X,x_1)$ 是平凡同态, 所以 $\rho_1*\overline{\rho_2}$ 在 X 中是零伦的, 即与常值道路 e_x 等价. 因此 $\sigma*\rho_1\sim\sigma*\rho_2$, 即有 $(\sigma*\rho_1)^*=(\sigma*\rho_2)^*$, 从而完成了 p 是覆盖投影的证明.

最后还须验证 $\widetilde{X}$ 是道路连通的而且存在 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$, $x_0\in X$ 满足 $p_*\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)=H$. 设 σ 是 X 中以 x_0 为起点的道路, 我们作出它在 p 之下的提升 $\tilde{\sigma}$: 令从 x_0 到 $\sigma(t)$ 的道路 $\sigma_t: I\to X$ 定义为 $\sigma_t(s)=\sigma(ts)$, $s\in[0,1]$, $t\in[0,1]$. 构作 $\tilde{\sigma}: I\to\widetilde{X}$ 由 $\tilde{\sigma}(t)=$

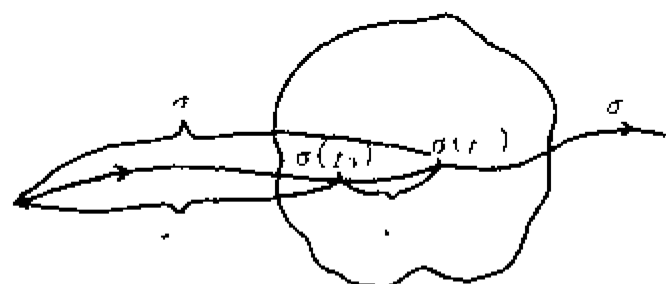


图2 7

$(\sigma_t)^*$，$t\in[0,1]$所决定，则$\tilde{\sigma}(0)$是X中以x_0为基点的常值道路e_{x_0}关于H所属的等价类，记为$\tilde{x}_0=(e_{x_0})^*$，$\tilde{\sigma}(1)$恰好是σ^*，而且$p(\tilde{\sigma}(t))=p((\sigma_t)^*)=\sigma_t(1)=\sigma(t)$，$t\in[0,1]$，因此满足$p\tilde{\sigma}=\sigma$。我们在此证明这样的映射$\tilde{\sigma}$是连续的：对任取的$t_0$及$\tilde{\sigma}(t_0)=(\sigma_{t_0})^*$在$\tilde{X}$中的邻域$B(U,t_0)$。如图2－7所示，当选取充分小的$\delta>0$，使得$|t_1-t_0|<\delta$保证$\sigma(t_1)\in U$。设$\rho$是$\sigma$从$\sigma(t_0)$到$\sigma(t_1)$的部分道路，即$\rho(s)=\sigma((1-s)t_0+st_1)$，$s\in[0,1]$，于是存在$\sigma_{t_0}*\rho$与$\sigma_{t_1}$之间的同伦：

$$F(s,t)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{2[t_0(1-t)+t_1t]s}{[1+t]}\right), & s\in[0,\frac{1+t}{2}]\\ \sigma(t_0(1-(2s-1))+t_1(2s-1)), & s\in[\frac{1+t}{2},1]\end{cases}$$

而$\tilde{\sigma}(t_1)=(\sigma_{t_1})^*\in B(U,\sigma_{t_0})$，所以$\tilde{\sigma}$在$t_0$处连续

于是，对任意的$\sigma^*\in\tilde{X}$，σ是X中以x_0为起点的道路，它的提升$\tilde{\sigma}$以$\tilde{x}_0$为起点，σ^*为终点 即任一点σ^*可以用一条道路与$\tilde{x}_0$连接起来，因此$\tilde{X}$是道路连通的

对任取的$[\sigma]\in H$，而$\tilde{\sigma}$是下述在p之下σ的提升：这时$[\sigma*e_{x_0}]=[\sigma]\in H$，所以在$H$之下$\sigma\sim e_{x_0}$，$\sigma^*=(e_{x_0})^*=\tilde{x}_0$，于是$\tilde{\sigma}$是$\tilde{X}$中以$\tilde{x}_0$为基点的闭路 因为$p([\tilde{\sigma}])=[\sigma]$，所以$[\sigma]\in$

$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$，因此 $H\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$. 反之，对 $[\sigma]\in\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$，令 $\sigma=p\tilde{\sigma}$，因为 $\tilde{\sigma}$ 是以 $\tilde{x}_0$ 为起点的 σ 的唯一提升道路，所以 $\tilde{\sigma}$ 的终点是 σ^*. 又因 $\tilde{\sigma}$ 是 $\widetilde{X}$ 中闭路，$\tilde{\sigma}(1)=\tilde{x}_0$，所以 $\sigma^*=\tilde{x}_0=(e_{x_0})^*$，$\sigma$ 与 e_{x_0} 在 H 之下是同伦. 从而有 $[\sigma]\in H$，即 $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\subset H$. 因此 $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)=H$.

综上所述，$(\widetilde{X}, p)$ 是 X 的覆盖空间 ∎

§5　泛覆盖空间

从上节的存在性定理，对于道路连通、局部道路连通且半局部单连通空间 X 而言，它的基本群的子群共轭类与 X 的覆盖空间的同构类构成一一对应. 从此有两个特殊的情形：一种是对于整个基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的覆盖空间 (X, id_X)，此中 id_X 是到自身的恒同映射；另一种是对应于 $\pi_1(X, x_0)$ 中仅包含单位元的平凡子群的覆盖空间，这时的覆盖空间 $(\widetilde{X}, p)$，$\widetilde{X}$ 必定是单连通的. 于是有下面的概念.

定义　设 $(\widetilde{X}, p)$ 是 X 的覆盖空间，当 $\widetilde{X}$ 是单连通的，则称 $(\widetilde{X}, p)$ 是 X 的**通用覆盖空间，或泛覆盖空间**.

定理　*空间 X 的任两个泛覆盖空间是同构的.*

证明　由于空间 X 的任一泛覆盖空间决定于底空间 X 的基本群的平凡子群，由上一节的分类定理，则 X 的任两个泛覆盖空

间是同构的. ∎

例 1 S^1 的覆盖空间 $(\boldsymbol{R}^1, p)$, 这时 $\pi_1(\boldsymbol{R}^1)=0$, $p_*\pi_1(\boldsymbol{R}^1)=0$ 是 S^1 的基本群的平凡子群, 所以 $(\boldsymbol{R}^1, p)$ 是 S^1 的泛覆盖空间.

例 2 (S^2, p) 是 $\boldsymbol{R}P^2$ 的覆盖空间, 因为 S^2 是单连通的, 所以 (S^2, p) 是 $\boldsymbol{R}P^2$ 的泛覆盖空间.

例 3 $(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}, \gamma)$ 是环面 T^2 的覆盖空间, 因为 $\boldsymbol{R}$ 是单连通的, $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 也是单连通的, 所以 $(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}, \gamma)$ 是 T^2 的泛覆盖空间.

例 4 (S^1, q_n) 不是 S^1 的泛覆盖空间.

例 5 无穷螺线 Q 也是 S^1 的覆盖空间, 这时 $\pi_1(Q)=\{0\}$ 与 $\pi_1(\boldsymbol{R})$ 同构, 所以 S^1 的两个泛覆盖空间 $(\boldsymbol{R}^1, p)$ 与 (Q, p) 是同构的.

定理 设 $(\widetilde{X}, p)$ 是 X 的泛覆盖空间, $(\widetilde{X}_1, p_1)$ 是 X 的任一覆盖空间, 则存在同态 $\varphi: \widetilde{X}\to\widetilde{X}_1$, 使得 $(\widetilde{X}, \varphi)$ 是 $\widetilde{X}_1$ 的覆盖空间.

证明 设 $x_0\in X$, $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)$, 因为 $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是平凡群, 所以 $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\subset p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)$. 由上一节定理 4, 则存在同态 φ 满足 $\varphi(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$, 再由上节定理 6, $(\widetilde{X}, \varphi)$ 是 $\widetilde{X}_1$ 的覆盖空间. ∎

从定理即知所谓泛覆盖空间的涵意.

对于空间 X 的泛覆盖空间 $(\widetilde{X}, p)$, 一方面有它的示性类, 即由 X 的基本群的子群共轭所决定, 另一方面, $(\widetilde{X}, p)$ 有它的自同构群 $A(\widetilde{X}, p)$. 这两者的关系由下面的定理给出.

定理 设 $(\widetilde{X}, p)$ 是 X 的泛覆盖空间, 则 $(\widetilde{X}, p)$ 的自同构群

$A(\tilde{X},p)$与$\pi_1(X,x_0)$同构. $\pi_1(X,x_0)$的阶就是泛覆盖空间的片数.

证明　在X中取基点x_0，并在$\tilde{X}$中取一点$\tilde{x}$满足$p(\tilde{x})=x_0$. 定义函数$T:A(\tilde{X},p)\to\pi_1(X,x_0)$如下：对$f\in A(\tilde{X},p)$，$f(\tilde{x})\in\tilde{X}$，设$\gamma$是$\tilde{X}$中从$\tilde{x}$到$f(\tilde{x})$的道路，因为$f$满足$pf=p$，所以$f(\tilde{x})\in p^{-1}(x_0)$. 因此$p\gamma$是$X$中以$x_0$为基点的闭路. 从此定义$T(f)=[p\gamma]$，$f\in A(\tilde{X},p)$.

由于$\tilde{X}$单连通，所以$\tilde{x}$到$f(\tilde{x})$的任一道路都是同伦的，因此对给定的f，$[p\gamma]$是完全确定的，因此T是完全确定的.

现证明T是同态：设$f_1,f_2\in A(\tilde{X},p)$，$\gamma_1$、$\gamma_2$分别表示$\tilde{X}$中从一点$\tilde{x}\in\tilde{X}$到$f_1(\tilde{x})$和$f_2(\tilde{x})$的道路，则$T(f_1)=[p\gamma_1]$，$T(f_2)=[p\gamma_2]$，而乘积道路$\gamma_1*f_1\gamma_2$是从$\tilde{x}$到$f_1f_2(\tilde{x})$的道路，因此$T(f_1f_2)=[p(\gamma_1*f_1\gamma_2)]=[p\gamma_1*pf_1\gamma_2]=[p\gamma_1*p\gamma_2]=T(f_1)T(f_2)$.

再证T是单射：设$T(f_1)=T(f_2)$，则由f_1与f_2决定的X中的闭路$p\gamma_1$与$p\gamma_2$等价. 根据单值化定理，由于$f_1(\tilde{x})=f_2(\tilde{x})$，所以$f_1=f_2$.

最后证明T是满射：设$[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$，令$\tilde{\alpha}$是$\tilde{X}$中起点在$\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$的α的覆盖道路. 因为$\tilde{X}$单连通，$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})=\{0\}\subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{\alpha}(1))$，因此存在映射$p$的提升$h$满足$h(\tilde{x})=\tilde{\alpha}(1)$而且$ph=p$，所以$h$是同态. 我们将$\tilde{\alpha}(1)$与$\tilde{x}$对调，同理存在$(\tilde{X},p)$上的同态$k$，满足$k(\tilde{\alpha}(1))=\tilde{x}$. 由于$hk$和$kh$都是$\tilde{X}$上的

道同伦，且在某一点处一致，所以 h 是同构，满足 $T(h)=[\widetilde{p\alpha}]=[\alpha]$，从而完成了 $A(\widetilde{X},p)$ 与 $\pi_1(X,x_0)$ 是同构的证明.

再者，由于 T 是单射，它建立了 $p^{-1}(x_0)$ 与 $\pi_1(X,x_0)$ 的子集间的一一对应，而 T 是满射表明 $\pi_1(X,x_0)$ 的每个同伦类 $[\alpha]$ 对应于 $p^{-1}(x_0)$ 中的一点 $\tilde{\alpha}(1)$. 因此 $p^{-1}(x_0)$ 的基数，即 $(\widetilde{X},p)$ 的片数等于 $\pi_1(X,x_0)$ 的阶. ▌

这个定理说明 $\pi_1(X,x_0)$ 的一种计算方法.

例 设 $(\boldsymbol{R}^1,p)$ 是 S^1 的泛覆盖空间，其中 $p:\boldsymbol{R}^1\to S^1$ 是指数映射. 定义映射 $\varphi:A(\widetilde{X},p)\to\boldsymbol{Z}$ 如下：设 $f\in A(\widetilde{X},p)$，则有 $pf(t)=p(t)$，$t\in\boldsymbol{R}^1$，即 $\exp(2\pi i f(t))=\exp(2\pi i t)$，因此 $f(t)-t\in\boldsymbol{Z}$. 由于 $\boldsymbol{R}^1$ 是连通的，因此 $(f-\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{R}^1)$ 也是连通的. 从而存在 $n\in\boldsymbol{Z}$ 使 $f(t)=t+n$，因此得知 f 与 n 建立一一对应，所以 $A(R^1,p)$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 同构，根据上述定理，得出 $\pi_1(S^1)\approx\boldsymbol{Z}$.

例 (S^2,p) 是 $\boldsymbol{RP}^2$ 的泛覆盖空间，此中 p 是将对径点等同的投影. 它有两个自同构，即恒同映射和对径映射. 因此 $A(S^2,p)$ 是阶为 2 的循环群，由上述定理，$\pi_1(\boldsymbol{RP}^2)\approx\boldsymbol{Z}_2$.

§6 应 用

在本章的最后，以定理和推论的形式，介绍覆盖空间理论的应用的几个例子.

定理 不存在连续映射 $f:S^2\to S^1$ 满足对所有的 $x\in S^2$，$f(-x)=-f(x)$.

注 这个定理是著名的 Borsuk－Ulam 定理的特殊情况. 该

定理断言：不存在连续映射 $f:S^n\to S^{n-1}(n\geq 1)$ 使得对所有的 $x\in S^n$，$f(-x)=-f(x)$，亦即把对径点映到对径点去的连续映射 $S^n\to S^{n-1}$ 是不存在的．当 $n=1$，定理是显然的，因为这时 S^0 是离散的，而 S^1 是连通的．$n=2$ 即我们要介绍的定理．

证明　用反证法．假如将 S^2 的对径点映到 S^1 的对径点的连续映射 f 存在的话，由于 S^2（相应地 S^1）是 $\boldsymbol{RP}^2$（相应地 $\boldsymbol{RP}^1$）的覆盖空间，因此可定义连续映射 $g:\boldsymbol{RP}^2\to\boldsymbol{RP}^1$ 使得下面图表可交换，其中 p,q 分别是相应的覆盖空间的覆盖投影：

$$\begin{array}{ccc}(S^2,x_0) & \xrightarrow{f} & (S^1,y_0)\\ p\downarrow & & \downarrow q\\ (\boldsymbol{RP}^2,p_0) & \xrightarrow{g} & (\boldsymbol{RP}^1,q_0)\end{array}$$

其中 $x_0\in S^2$，$y_0=f(x_0)$，$p_0=p(x_0)$，$q_0=q(y_0)$．设 α 是 S^2 连结一对对径点 x_0 到 $-x_0$ 的道路，则 $qf\alpha$ 属于 $\boldsymbol{RP}^1$ 中以 q_0 为基点的闭路的一个等价类．而从 f 的性质，我们有 $f\alpha(1)=f(-x_0)=-f(x_0)\neq f\alpha(0)$，因此 $f\alpha$ 不是闭路．所以 $qf\alpha$ 不属于 q_0 处的常值闭路等价类，即 $[qf\alpha]\neq[0]$．然而从图表的可交换性，$[qf\alpha]=[gp\alpha]$，其中 $p\alpha$ 属于基点在 p_0 处的闭路等价类，而 $g_*([p\alpha])=[qf\alpha]\neq[0]$．另方面，由于 $\pi_1(\boldsymbol{RP}^2)\cong \boldsymbol{Z}_2$，$\pi_1(\boldsymbol{RP}^1)\cong\boldsymbol{Z}$，而从 $\boldsymbol{Z}_2$ 到 $\boldsymbol{Z}$ 的同态必定是平凡同态，即 $g_*([p\alpha])=[0]$，得出矛盾．▌

推论 1　设 $g:S^2\to\boldsymbol{R}^2$ 是连续映射，使得对一切 $x\in S^2$，$g(-x)=-g(x)$．则有某个 S^2 中的点 x 满足 $g(x)=0$．

证明　假如对一切 $x\in S^2$，$g(x)$ 均不为零，则由 $f(x)=g(x)/\|g(x)\|$，$x\in S^2$ 所决定的 $f:S^2\to S^1$ 是连续的，与上述定理矛盾．▌

推论 2　设 $h: S^2\to \boldsymbol{R}^2$ 是个连续映射，则至少有一对对径点 x 与 $-x$ 满足 $h(x)=h(-x)$.

证明　假如在 S^2 中不存在满足 $h(x)=h(-x)$ 的点 $x\in S^2$，则由 $g(x)=h(x)-h(-x)$，$x\in S^2$ 所决定的函数 $g: S^2\to \boldsymbol{R}^2$ 与推论 1 矛盾 ∎

注　推论 2 有一个有趣的物理解释. 当我们把地球表面看为一个 2 维球面，假设测量气压和温度的函数 $A(x)$ 与 $T(x)$ 都是连续的. 则映射 $h: S^2\to \boldsymbol{R}^2$ 由 $h(x)=(A(x),T(x))$，$x\in S^2$ 所定义是连续的. 推论 2 表明在地球表面上至少存在一对对径点，具相同的气压和温度.

注　在以前所提起的基本群的例子，都是交换群. 我们从覆盖空间的概念，提供基本群是非交换群的例子. 如图 2-8 所示，设底空间 X 是两个外切的圆周：

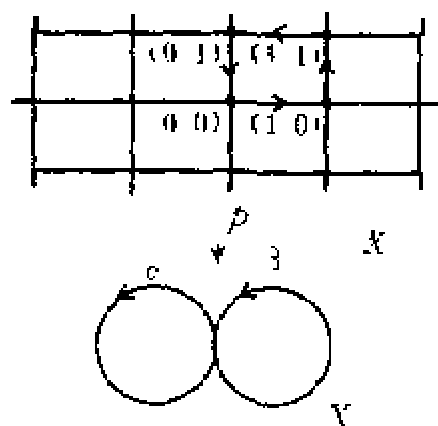


图 2-8

$X=\{(z,w)\in S^1\times S^1 \mid z=1$ 或 $w=1\}$，而覆盖空间 $\tilde{X}$ 为

$\tilde{X}=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x$ 或 y 是整数$\}$，覆盖投影 $p:\tilde{X}\to X$ 定义为 $p(x,y)=(\exp(2\pi i x),\exp(2\pi i y))$，$(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$. 于是，$p$ 把 X

中每个小方块的水平线段环绕X的左侧圆周，而每个竖直线段环绕X的右侧圆周. 设γ是$\tilde{X}$中基点在(0,0)处的闭路，而以$[\alpha]$和$[\beta]$分别表示X的左右圆周的基本群的生成元. 则$[\gamma]$不是$\pi_1(\tilde{X})$的恒等元，由于p_*是单射，所以$p_*([\gamma])=[\alpha]\circ[\beta]\circ[\alpha]^{-1}\circ[\beta]^{-1}$不是$\pi_1(X)$的恒等元. 而若$\pi_1(X)$是交换群，则它的换位子$[\alpha]\circ[\beta]\circ[\alpha]^{-1}\circ[\beta]^{-1}$必须是$\pi_1(X)$的恒等元，因此$\pi_1(X)$不是交换群.

习　　题

1. 设 $p_+:\boldsymbol{R}_+\to S^1$ 由 $p_+(t)=\exp 2\pi i t$ 所定义，证明 p_+ 是局部同胚，但不是覆盖投影.

2. 设 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间，$X_0\subset X$ 是连通且局部道路连通子集，$\tilde{X}_0$ 是 $p^{-1}(X_0)$ 的道路连通分支. 证明 $p|_{\tilde{X}_0}:\tilde{X}_0\to X_0$ 是覆盖投影.

3. 设 $(\tilde{X}_1,p_1)$ 是 X_1 的覆盖空间，$(\tilde{X}_2,p_2)$ 是 X_2 的覆盖空间. 如果 $X_1=X_2$，令 $\tilde{X}$ 是 $\{(x_1,x_2)\in\tilde{X}_1\times\tilde{X}_2,\ p_1(x_1)=p_2(x_2)\}$ 的道路连通分支. 设 $p:\tilde{X}\to X_1$ 为 $p(x_1,x_2)=p_1(x_1)$. 证明 p 是覆盖投影.

4. 设 $\tilde{X}$ 是连通且局部道路连通的紧致 T_2 空间，X 是连通且局部道路连通的 T_2 空间. 证明：局部同胚 $p:\tilde{X}\to X$ 必为覆盖投影.

5. 设 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间，σ,τ 是 X 的道路而且 $\sigma(1)=\tau(0)$，$\tilde{\sigma}$ 与 $\tilde{\tau}$ 分别是它们的提升，而且 $\tilde{\sigma}(1)=\tilde{\tau}(0)$，证明 $\tilde{\sigma}*\tilde{\tau}$ 是 $\sigma*\tau$ 的提升.

6. 设 $p:\tilde{X}\to X$ 是覆盖投影，如果映射 $s:X\to\tilde{X}$ 满足 $ps=\mathrm{id}_X$，则称 s 为 p 的截面. 证明 p 存在截面的充要条件是 $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)=\pi_1(X,p(\tilde{x}_0))$.

7. 设 X 连通且局部道路连通，$f: X \to S^1$ 零伦. 证明存在映射 $g: X \to R$ 使得 $f(x) = \exp(ig(x))$.

8. 验证覆盖空间的同构是等价关系.

9. 设 $(\tilde{X}, p)$ 是 X 的覆盖空间而且 $(\tilde{Y}, q)$ 是 Y 的覆盖空间，证明 $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ 是 $X \times Y$ 的覆盖空间，其中 $p \times q$ 表示自然的乘积映射.

10. 设下列图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X_2 \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_2} & \\ & X & \end{array}$$

证明　(i) 如果 p_1, p_2 是覆盖投影，则 p 也是覆盖投影.

(ii) 如果 p, p_1 是覆盖投影，则 p_2 也是覆盖投影.

(iii) 如果 p, p_2 是覆盖投影，而且 X 存在泛覆盖空间，则 p_1 也是覆盖投影.

11. 验证 X 的覆盖空间 $(\tilde{X}, p)$ 的一切自同构 $A(\tilde{X}, p)$ 是一个群.

12. 设 X 单连通，则 (X, id_X) 是 X 的泛覆盖空间，其中 id_X 表示 X 的恒同映射.

13. 证明实的 n 维射影空间 RP^n $(n \geqslant 2)$ 的基本群 $\pi_1(RP^n)$ 与模 2 整数群同构.

14. 利用§5最后一个定理证明 $\pi_1(S^1) \cong Z$，$\pi_1(S^1 \times S^2) \cong Z \oplus Z$.

第三章　单纯同调群

在第一章,我们引进联系一般拓扑空间的代数结构基本群,它虽具拓扑不变性,然而却不能完全依靠基本群作为判定两个空间是否同胚的依据,因为不同胚的空间可以具相同的基本群.例如 S^n,对所有的 $n\geqslant 2$,都有 $\pi_1(S^n)\simeq Z$.至于基本群概念的进一步推广,即所谓高维同伦群,我们将留到补充知识部分作一些介绍.

从历史发展的情况而言,有另一种观点和方法,乃从一类较特别的空间出发,引进另一种代数结构,即同调群的概念.由于它也具有拓扑不变性,因此对这一类特别的空间具有新的拓扑不变量,即所谓单纯同调群.它既直观而且便于计算.这个概念可以推广到对一般拓扑空间的情况,建立所谓奇异同调群概念,它也将留到补充知识部分再作简单介绍.

§1　单纯复形

为了建立单纯复形的概念,先介绍 n 维欧氏空间 R^n 中的一些基本概念.

定义　设 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 是 R^n 中 $p+1$ 个点,如果诸向量 $a_1-a_0,a_2-a_0,\cdots,a_p-a_0$ 是线性无关的,则称诸 $p+1$ 个点是**几何无关的,或几何独立的**.

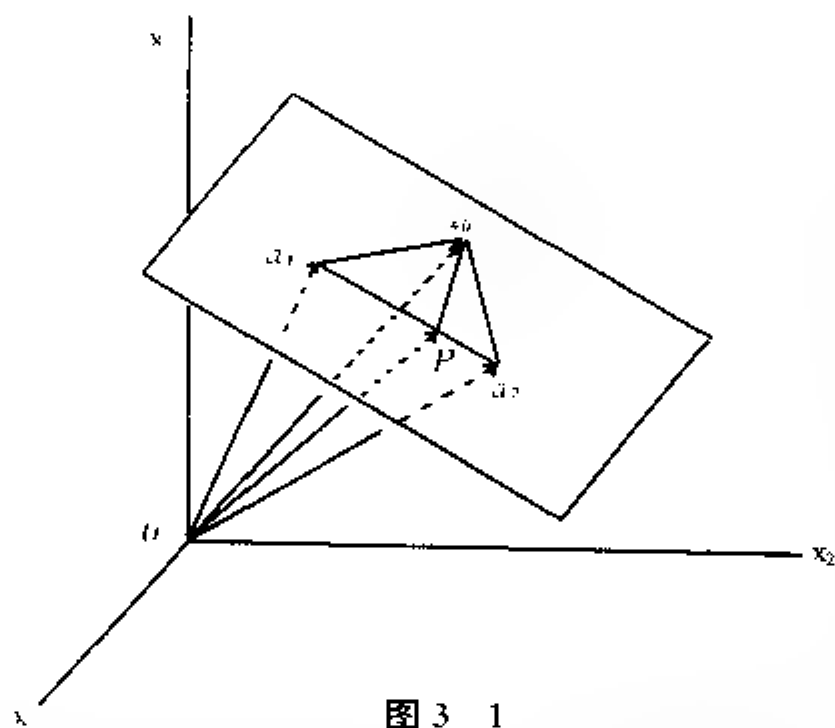


图3-1

从定义立即可知,在 R^3 中单独一点或两个不同的点 a_0,a_1 是几何独立的;不在一直线上的三点 a_0,a_1,a_2 是几何独立的;不在同一平面上的四点也是几何独立的.这些直观对象相当于确定一点、一个线段、一个三角形和一个四面体等几何图形.为了把这些图形作高维情况的推广,我们在 R^3 中观察几何独立的三点 a_0,a_1,a_2,则由该三点决定的平面的向量方程是 $\vec{OP}=\vec{Oa_0}+\vec{a_0P}=\vec{Oa_0}+\sum\lambda_i\vec{a_ia_0}$,其中 P 是该平面上的任一点(图3-1).用点表示时,设以 x 表示向

径$\overrightarrow{OP}$的端点P，即$x = a_0 + \sum_{i=1}^{2}\lambda_i(a_i - a_0)$

当我们把它写为$x = \sum_{i=0}^{2}\lambda_i a_i$，

则式中的$\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{2}\lambda_i$，或即$\sum_{i=0}^{2}\lambda_i = 1$

特当点$P(x)$在该平面的三角形$a_0a_1a_2$内部时，则诸$\lambda_i > 0$

上述概念推广到R^n中去，即得出几何独立的$p+1$个点a_0，$a_1, \cdots, a_p$决定唯一的一个p维超平面，该超平面的任一点x可唯一地表为

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i(a_i - a_0), \lambda_i \in R$$

或 $x = \sum_{i=0}^{p}\lambda_i a_i$，此中$\lambda_i \in R$而且满足关系式$\sum_{i=0}^{p}\lambda_i = 1$.

定义 设$a_0, a_1, \cdots, a_p$是R^n中的$p+1$个几何独立的点集，则点集

$$\{x \in R^n \mid x = \sum_{i=0}^{p}\lambda_i a_i, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{p}\lambda_i = 1\} \qquad (1)$$

称为以$a_0, a_1, \cdots, a_p$为顶点的p**维单形**，记为$(a_0 \cdots a_p)$，诸实数$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$称为点$x$关于诸点$a_0, \cdots, a_p$的**重心坐标**. p维单形记为σ^p（或简记为σ），其中p表示单形σ的维数$\dim \sigma$

因此，0维单形(a)是一点；1维单形(a_0a_1)是以a_0, a_1为端点的线段，即由点集

$$x = ta_0 + (1-t)a_1, 0 \leqslant t \leqslant 1$$

所组成，或记为$x = t_0a_0 + t_1a_1$，$t_0 \geqslant 0, t_1 \geqslant 0, t_0 + t_1 = 1$；（图3-2(i)）2维单形$(a_0a_1a_2)$是以$a_0, a_1, a_2$为顶点的三角形及其内部（图3-2(ii)）；3维单形$(a_0a_1a_2a_3)$是以a_0, a_1, a_2, a_3为顶点的四面体；等等. 显然，单形是R^n中紧致凸集. 而式(1)的点集中，λ_i

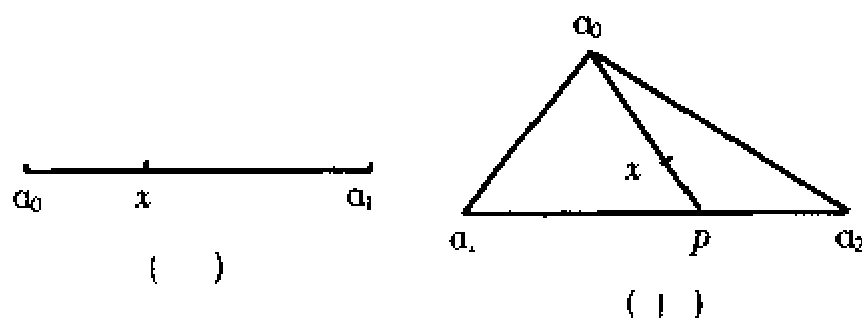


图3　2

均为正数的子集称为 p **维开单形**. 例如 1 维开单形是线段的内部, 2 维开单形是三角形的内部点集, 3 维开单形是四面体的内部点集等等. 对单形 $\sigma^p = (a_0\cdots a_p)$ 而言, 设 $i_0, i_1, \cdots, i_q$ 在 $0, 1, \cdots, p$ 中取值($q < p$); 当 $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_q}$ 是几何独立的, 则 q 维单形 $\sigma^q = (a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_q})$ 称为 p 维单形 σ^p 的 q **维面**($q \leqslant p$), 记为 $\sigma^q < \sigma^p$; 当 $q < p$ 时, 则称 σ^q 是 σ^p 的**真面**. 例如 $\sigma^2 = (a_0 a_1 a_2)$, 它的三个 0 维面是 (a_0), (a_1), (a_2); 三个 1 维面是 $(a_0 a_1)$, $(a_1 a_2)$ 和 $(a_0 a_2)$, 还有一个 2 维面即 $(a_0 a_1 a_2)$ 本身. 而且除了 $(a_0 a_1 a_2)$ 外, 其余诸面是 σ^2 的真面.

定义　设 K 是 R^n 中单形的有限集, 当 K 满足下述诸条件:

(i) 如果 σ 是 K 的成员, 则 σ 的任一个面也是 K 的成员;

(ii) 如果 σ_1 与 σ_2 都是 K 的成员, 则 σ_1 与 σ_2 的交集或者是空集、或者是 σ_1 与 σ_2 的公共面;

则 K 称为一个**单纯复形**, 或简称**复形**.

这时 K 中诸单形的维数的最大值称为该复形 K 的**维数**, 记为 $\dim K$.

设复形 L 包含在复形 K 之中, 即 L 的成员是 K 的成员的子集, 则 L 称为 K 的**子复形**, 记为 $L \subset K$.

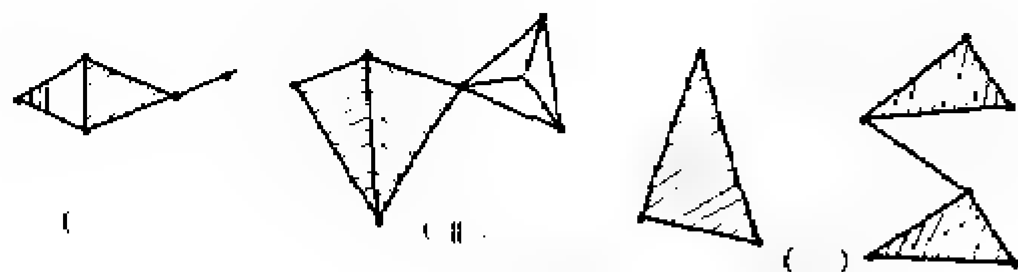


图 3-3

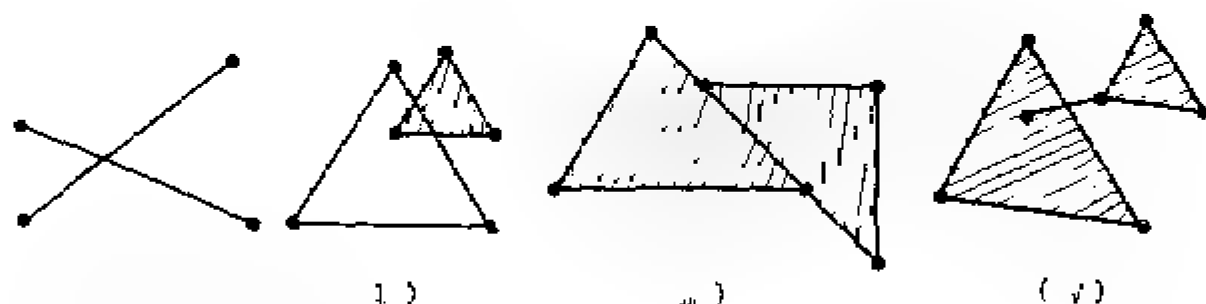


图 3-4

(图3-3(i)-(iii))都是复形;而(图3-4(i)-(iv))都不是复形.

例如 $K = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; (a_0a_1), (a_1a_2), (a_0a_2), (a_1a_3), (a_2a_3), (a_3a_4); (a_1a_2a_3)\}$ 是一个2维复形. 于是 $L = \{a_0, a_1, a_2; (a_0a_1), (a_1a_2), (a_0a_2); (a_1a_2a_3)\}$ 也是一个复形, 它是 K 的子复形. 而 $\{a_0, (a_0a_1)\}$ 却不是复形, 因为它不包含 (a_0a_1) 的面 (a_1).

定义　设 σ^p 是一个 p 维单形, 则它的所有的面所构成的集合是一个 p 维复形, 称为 σ^p 的**闭包复形**, 记为 $Cl\sigma^p = \{\sigma \mid \sigma < \sigma^p\}$.

而 σ^p 的全部真面是一个 $(p-1)$ 维复形, 称为 σ^p 的**边缘复形**, 记为 $Bd\sigma^p = \{\sigma \mid \sigma < \sigma^p, \sigma \neq \sigma^p\}$.

显然, $Bd\sigma^p$ 是 $Cl\sigma^p$ 的子复形.

对复形 K，其中维数不大于 r 的全部单形的集合是 K 的一个 r 维子复形，称为 K 的 r **维骨架**，记为 $K^r=\{\sigma\in K\mid \dim\sigma\leqslant r\}$。

单纯复形 K 的成员的并集，赋予欧氏空间 R^n 的子空间拓扑，记为 $|K|$，并称它为复形 K 的**几何承载**，或称为联系 K 的**多面体**。

定义　设 X 是一个拓扑空间，如果存在一个(几何)复形 K，它的几何承载 $|K|$ 与 X 同胚，则 X 称为一个**可(三角)剖分空间**，而该复形 K 称为 X 的**三角剖分**。

例 1　一个 3 维单形 $\sigma^3=(a_0a_1a_2a_3)$，它的闭包复形的 2 维骨架是一个复形 K，它的几何承载是一个四面体的边缘复形，与

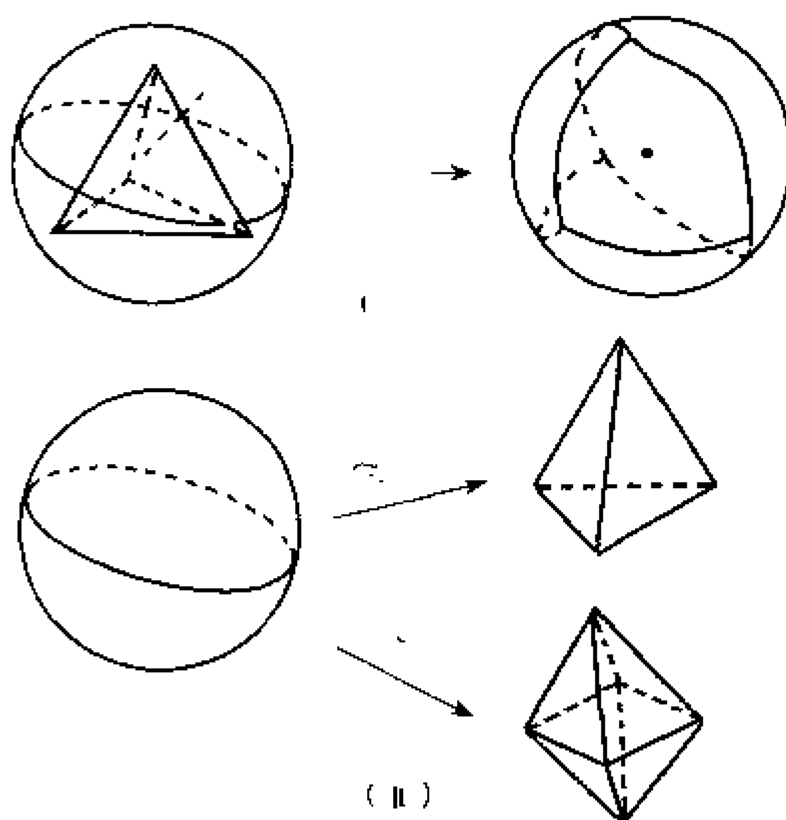


图3－5

S^2 同胚，因此 K 与 S^2 同胚，即这样的复形 K 是 S^2 的一个三角剖分（参见图3-5(i)）。同一个可剖分空间 S^2 可以有不同的三角剖分，如（图3-5(ii)）所示，它可以是四面体的边缘复形，也可以是八面体的边缘复形。

例2　圆柱面是可剖分空间。如（图3-6）所示，圆柱面可看为 $S^1\times I$，此中 S^1 是单位圆周，I 是单位线段。而 S^1 与三角形边缘同胚，因此圆柱面与三角柱面同胚，而三角柱面则有一个如（图3-6）右图的三角剖分。

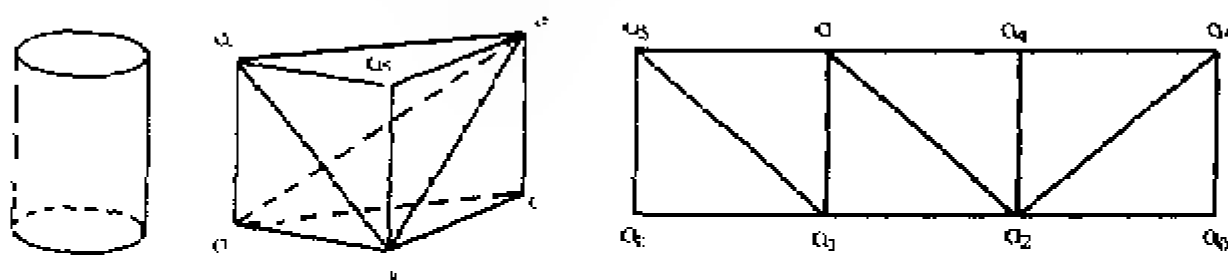


图3-6

例3　Möbius 带可以看为一个长方条子，将左右两个竖边之一扭转180°之后，把它们粘合起来而得到。因此它有一个如（图3-7）所示的三角剖分。

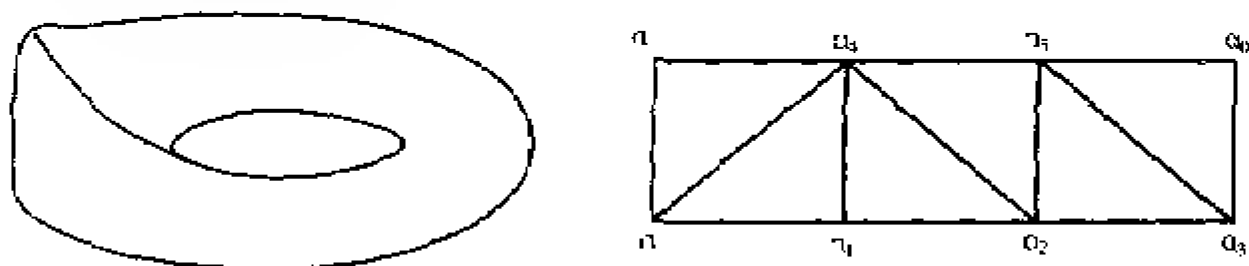


图3-7

例4　环面可以看为圆柱面沿左右两个边界圆周粘合而得到(图3-8).它有一个三角剖分如(图3-8)右图所示.为了保证粘合过程,不会将不该粘合的地方也粘起来,因此必须剖分为充分多的三角形.例如(图3-9)所示,它不能作为环面的三角剖分,因此按照图3-9,把不该粘合的地方也粘起来,则与圆柱面不同胚.

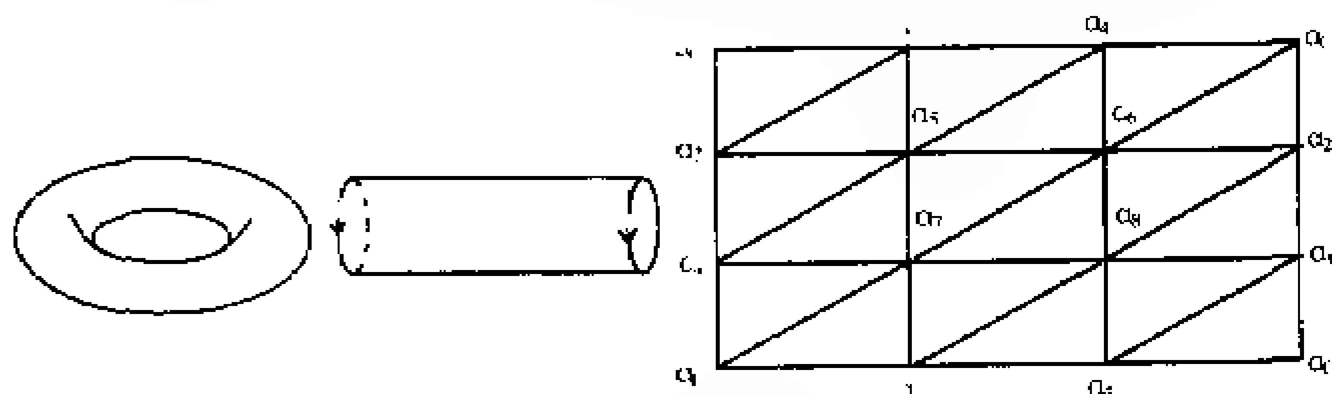


图3-8

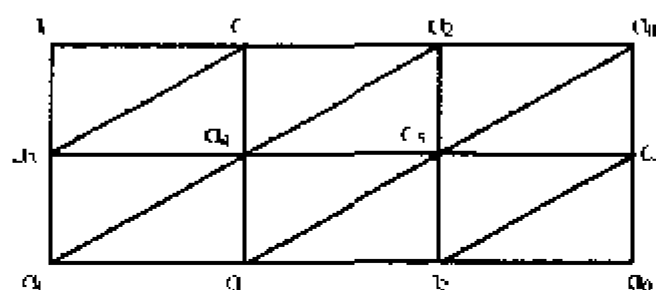


图3-9

例5　Klein瓶是可剖分空间.如(图3-10)所示,它可以看为圆柱面经过扭曲后沿两个竖向边界圆周粘合而得到.它不能嵌入地实现在R^3中,为了在R^3画出示意图像,它只好自身穿越.它的一个三角剖分如(图3-10)右图所示

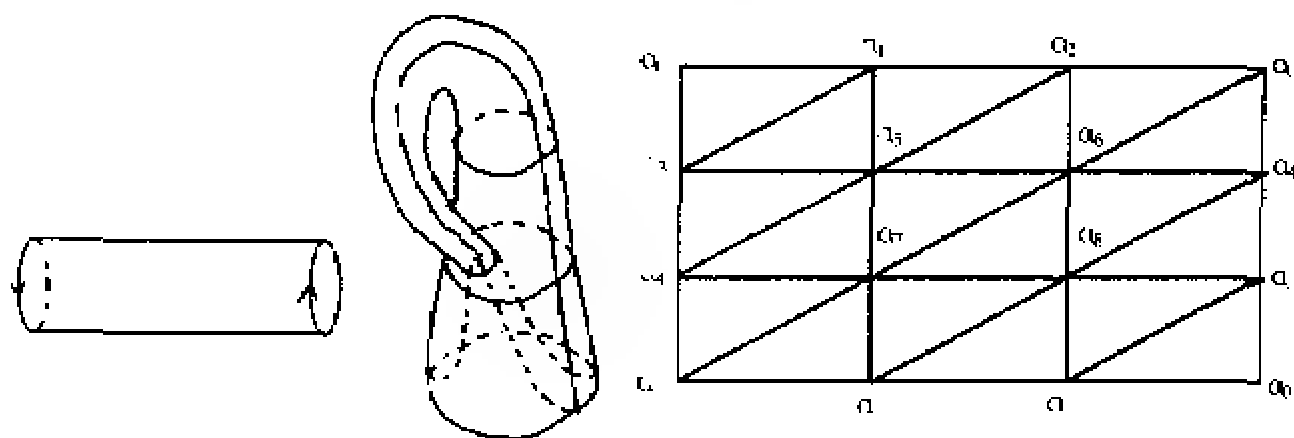


图3-10

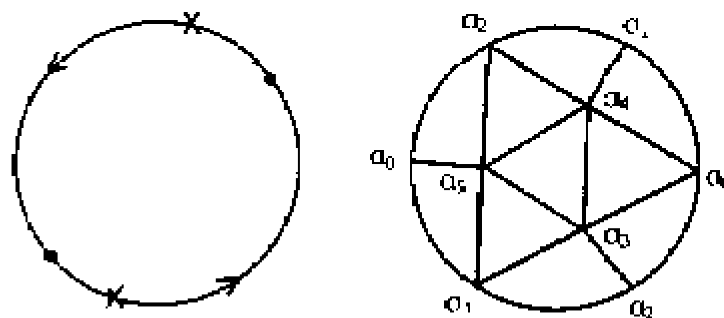


图3-11

例6 射影平面也是可剖分空间. 因为射影平面可看为一个有限圆盘将每一对对径点粘同起来(图3-11左图)而得到. 它的一个三角剖分如(图3-11右图)所示.

注 可剖分空间实际上已相当广泛,1维、2维和3维流形,以及任意维数的微分流形等已经证明都是可剖分空间,其内容已超出本书范围.

在此引进另一个概念,它对建立单纯同调群起重要作用.

定义　一个 n 维单形 $\sigma^n=(a_0a_1\cdots a_n)$ $(n\geq 1)$ 在选取它的诸顶点的顺序后，则对诸顶点顺序作任意变动而得出新的顺序，它必属于原顺序的奇排列或偶排列这两个等价类之一，属于原顺序的偶排列的一类所决定的单形称为**正定向单形**，记为 $+\sigma^n$；而属于奇排列的一类则称为**负定向单形**，记为 $-\sigma^n$. 确定了定向的单形称为**定向单形**.

注　为了统一起见，对零维单形 (a)，也用形式 $+(a)$ 或 $-(a)$ 赋予定向.

例　在 1 维单形 $\sigma^1=(a_0a_1)$ 中，当我们约定诸顶点顺序为 $a_0<a_1$，则 $+\sigma^1=(a_0a_1)$，$-\sigma^1=(a_1a_0)$. 对 2 维单形 $\sigma^2=(a_0a_1a_2)$，当指定诸顶点的顺序为 $a_0<a_1<a_2$，则 $(a_0a_1a_2)$、$(a_1a_2a_0)$、$(a_2a_0a_1)$ 等的顶点顺序都是约定的顶点顺序的偶排列，因此它们都是正定向的，记为 $+\sigma^2$；而 $(a_0a_2a_1)$、$(a_2a_1a_0)$、$(a_1a_0a_2)$ 则均为奇排列，它们都是负定向单形，都记为 $-\sigma^2$（参见图 3-12）.

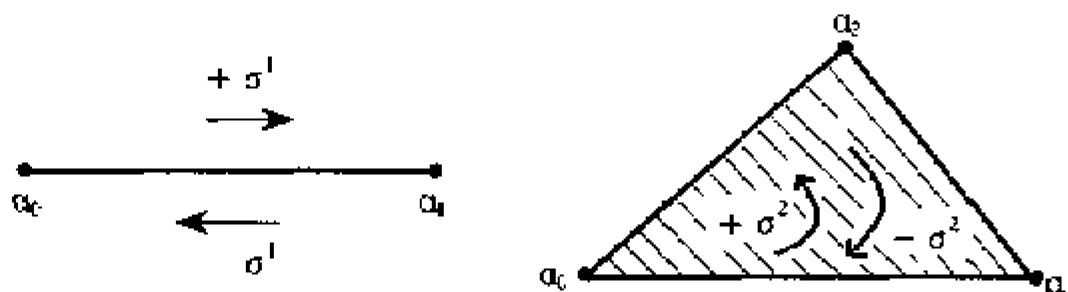


图 3-12

定义　设 K 是单纯复形. 如果 K 中每个单形都给予定向，则称该复形是**定向复形**. 这时 K 中每个具指定定向单形都认为是正定向单形.

§2　单纯同调群

定义　设 K 是定向复形，K_p 表示 K 中 p 维定向单形的集合．如果映射 $c_p: K_p \to \mathbf{Z}$ 使得对每个 $\sigma^p \in K_p$，$c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$，则称映射 c_p 是一条 **p 维链**．设 c_p 和 d_p 都是 p 维链，由整数群 $\mathbf{Z}$ 诱导的点态加法运算，定义 c_p 与 d_p 的**和**为一条 p 维链 $c_p + d_p$ 如下：

$$(c_p + d_p)(\sigma^p) = c_p(\sigma^p) + d_p(\sigma^p).$$

在这种运算之下，所有的 p 维链构成一个交换群，称为 K 的 **p 维链群**，记为 $C_p(K)$．$C_p(K)$ 的零元素是零链 $0: K_p \to \mathbf{Z}$，它对任一个 $\sigma^p \in K_p$，$0(\sigma^p) = 0 \in \mathbf{Z}$；链 c_p 的逆元是 p 维链 $-c_p: K_p \to \mathbf{Z}$ 满足对所有的 $\sigma^p \in K_p$，$(-c_p)(\sigma^p) = -c_p(\sigma^p)$．

为方便起见，当 $p<0$ 或 $p>\dim K$，令 $C_p(K)=0$．

设 $c_p(+\sigma^p) = g \in \mathbf{Z}$，则 $g\sigma^p$ 称为一个**基本 p 维链**．因此，一条任意的 p 维链 d_p 可表为基本群的有限和 $d_p = \sum g_i \sigma_i^p$，其中 i 遍历 K 的所有的 p 维定向单形．

从 p 维链的定义，我们有下列诸结论：

(i)　设 $c_p = \sum_i f_i \cdot \sigma_i^p$，$d_p = \sum_i g_i \cdot \sigma_i^p$ 是 K 的两条 p 维链，则它们的和

$$c_p + d_p = \sum (f_i + g_i)\sigma_i^p$$

也是一条 p 维链．

(ii)　链 c_p 在群 $C_p(K)$ 中的逆元是 p 维链

$$c_p = \sum f_i \sigma^p$$

(iii) 如果 K 具有 α_p 个 p 维单形，则 $C_p(K)$ 与 α_p 个 $\mathbf{Z}$ 的直和同构. 一个同构由对应

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p \longleftrightarrow (g_1, g_2, \cdots, g_{\alpha_p})$$

给出

注　与整数加群不同的代数系统亦可用来作为 p 维链的系数 任一交换群、可交换环或域都可作为链的系数，因而使 $C_p(K)$ 相应地成为一个可交换群、一个模或一个向量空间 本书中我们将仅用整数加群作为系数

对一个基本 1 维链 (a_0a_1)，它的端点集是 $\{a_0, a_1\}$，对于定向单形 (a_0a_1)，自然地规定它的边缘链是 0 维链 $a_1 + (-a_0) = a_1 - a_0$. 而一个 2 维基本链是一个定向的 2 维单形 $(a_0a_1a_2)$，它的边缘链自然地定义为 1 维链 $(a_0a_1) + (a_1a_2) + (a_2a_0)$；而 2 维链 $(a_0a_1a_2) + (a_1a_3a_2)$ 的边缘链则为 1 维链 $(a_0a_1) + (a_1a_3) + (a_3a_2) + (a_2a_0)$，此中 (a_1a_2) 与 (a_2a_1) 互为逆元，取和时消去（参见图 3-13）

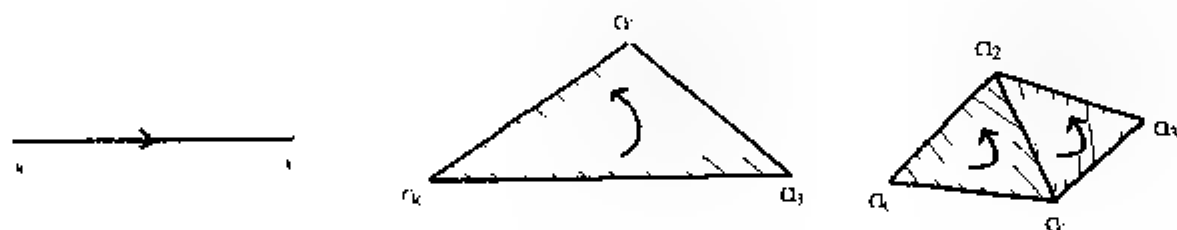


图 3-13

上述概念加以推广，即得出如下的

定义　从复形 K 中 p 维链到 $p-1$ 维链的同态

$$\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$$

满足条件

(i) 对每个 $\sigma^p=(a_0\cdots a_p)$，令

$$\partial_p\sigma^p=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots a_p)$$，式中 $\hat{a}_i$ 表示将顶点 a_i 从式中去掉；

(ii) 对任一条 $c_p=\sum g_i\sigma_i^p\in C_p(K)$，令 $\partial_p c_p=\sum_i g_i\partial_p\sigma_i^p$；

以上诸式中，$0<p\leqslant\dim K$

当 $p\leqslant 0$ 或 $p>\dim K$，令 ∂_p 是零同态

则该映射 ∂_p 称为复形 K 的 p **维边缘同态**

边缘同态具有下述的重要性质：

定理 设 K 为定向复形，则对一切整数 p，乘积同态 $\partial_{p-1}\circ\partial_p:C_p(K)\to C_{p-2}(K)$ 是零同态. 亦即任意链接连取两次边缘同态，其合成是个零同态，亦即其像是零链. 简记为 $\partial^2=0$.

证明 对 $p\leqslant 1$ 或 $p>\dim K$，定理的结论是显然的. 当 $1<p\leqslant\dim K$，由于同态 ∂ 的线性性质，只要证明定理对任一基本链 $\sigma^p=(a_0\cdots a_p)\in K$ 成立即可，亦即只须证明 $\partial_{p-1}\circ\partial_p(\sigma^p)=0$.

事实上，$\partial_{p-1}\circ\partial_p\sigma^p=\partial_{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots a_p)\right)=$

$$=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(a_0\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_p)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{j-1}(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_p)\right)=$$

$$=\sum_{0\leqslant j<i\leqslant p}(-1)^{i+j}(a_0\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_p)$$

$$+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j-1}(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_p)$$

$$=0$$

定义 边缘同态 ∂_p 的核 $\ker\partial_p=\{c_p\in C_p(K)\mid\partial_p c_p=0\}$ 称为

定向复形 K 的 p 维**闭链群**，记为 $Z_p(K)$，它是 $C_p(K)$ 的子群；∂_{p+1} 的像 $\mathrm{Im}\,\partial_{p+1}=\{\partial_{p+1}c_{p+1}\mid c_{p+1}\in C_{p+1}(K)\}$ 称为 K 的 p 维**边缘链群**，记为 $B_p(K)$，它也是 p 维链群 $C_p(K)$ 的子群，而且是 p 维闭链群 $Z_p(K)$ 的子群. $Z_p(K)$ 中的链称为 p 维**闭链**，$B_p(K)$ 中的链称为 p 维**边缘链**.

由于 $\partial_0=0$，所以 $Z_0(K)=C_0(K)$；当 $\dim K=n$，则 $C_{n+1}(K)=0$，所以 $B_n(K)=0$.

注　从定义即知 $\partial_p: C_p(K)\to B_{p-1}(K)$ 是满同态. 它的核是 $Z_p(K)$. 根据交换群的同态定理

$$C_p(K)/Z_p(K)\cong B_{p-1}(K)$$

定义　对定向复形 K 上的两个 p 维闭链 c_p 与 d_p，假如存在 K 的一个 $(p+1)$ 维链 c_{p+1} 使得

$$\partial(c_{p+1})=c_p-d_p,$$

则称 c_p 与 d_p 是**同调的**，记为 $c_p\sim d_p$.

假如 p 维闭链 z_p 是一个 $(p+1)$ 维链的边缘，则称 z_p 同调于零，记为 $z_p\sim 0$.

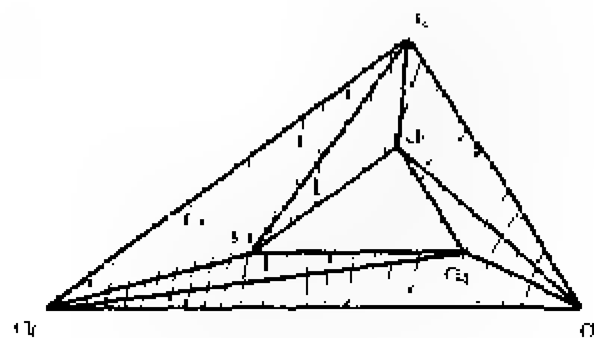


图3-14

如(图3-14)所示，设 $c_1=(a_0a_1)+(a_1a_2)+(a_2a_0)$，$c_2=(a_3a_4)+(a_4a_5)+(a_5a_3)$，则 c_1 与 c_2 均不同调于零，而 $c_1-c_2\sim 0$，所以 $c_1\sim c_2$.

p 维闭链集合中的同调关系是一个等价性关系，因此将 p 维闭链

群 $Z_p(K)$ 划分为等价类，记为 $\{z_p\} = \{c_p \in Z_p(K) \mid c_p \sim z_p\}$。同调类 $\{z_p\}$ 实际上是旁集

$$z_p + B_p(K) = \{z_p + \partial(c_{p+1}) \mid \partial(c_{p+1}) \in B_p(K)\}.$$

因此诸同调类实际上是商群 $Z_p(K)/B_p(K)$ 的成员.

定义 设 K 是定向单纯复形，p 是个非负整数，则 K 的 p 维**单纯同调群**(简称 p **维同调群**)是商群：$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$

例1 设 K 是单点空间 $\{a\}$，求它的各维同调群

因为这时 $C_p(K) = \begin{cases} Z(a), p=0 \\ 0, p\neq 0 \end{cases}$

而且 $Z_p(K) = \begin{cases} Z(a), p=0 \\ 0, p\neq 0, \end{cases}$ 因此对所有的 p，$B_p(K)=0$，从而得出

$$H_p(K) = Z_p(K) = \begin{cases} Z(a) \cong Z, & p=0 \\ 0, & p\neq 0. \end{cases}$$

例2 设 K 是一个 2 维单形 $(a_0a_1a_2)$ 的闭包复形 $Cl(K)$，且定向由顶点顺序 $a_0<a_1<a_2$ 所诱导，计算 K 的各维同调群.

除了 $p=0,1,2$ 之外，其余诸 $H_p(K)=0$

首先，K 上 0 维链的形式为 $c_0 = g_0(a_0) + g_1(a_1) + g_2(a_2)$，其中 $g_i \in \mathbf{Z}(i=1,2,3)$，所以零维链群 $C_0(K)$ 与直积 $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ 同构，因此 $Z_0(K)$ 也与 $C_0(K)$ 同构. 由于 1 维链取形式 $c_1 = h_0(a_0a_1) + h_1(a_1a_2) + h_2(a_0a_2)$，$h_i \in \mathbf{Z}(i=0,1,2)$，因此 $C_1(K)$ 也与 $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ 同构. 根据

$$\partial c_1 = (-h_0 - h_2)(a_0) + (h_0 - h_1)(a_1) + (h_1 + h_2)(a_2),$$

则当 0 维链 c_0 是边缘链，即 $c_0 = \partial c_1$ 时，即有关系式 $-h_0 - h_2 = g_0$，$h_0 - h_1 = g_1$，$h_1 + h_2 = g_2$，于是应有 $g_0 + g_1 = -g_2$，因此该零链只有两个系数独立的，得出 $B_0(K) \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. 从此得出 $H_0(K)$

$=Z_0(K)/B_0(K)\cong(Z\oplus Z\oplus Z)/(Z\oplus Z)\cong Z$.

其次，当1维链 c_1 是闭链，即当 $\partial c_1=0$，则它的系数满足 $-h_0-h_2=0, h_0-h_1=0, h_1+h_2=0$，因此它们应满足 $h_0=h_1=-h_2$，即 $c_1=h(a_0a_1)+h(a_1a_2)-h(a_0a_2)$，其中 $h\in Z$，所以 $Z_1(K)\cong Z$. 由于 K 仅有一个2维单形 $(a_0a_1a_2)$，所以2维链取形式 $c_2=h(a_0a_1a_2), h\in Z$；从而有 $C_2(K)\cong Z$. 当它是闭链，即 $\partial c_2=0$ 时，则 $\partial(h(a_0a_1a_2))=h(a_0a_1)+h(a_1a_2)-h(a_0a_2)=0$，它成立仅当 $h=0$，所以 $Z_2(K)=\{0\}$. 从此得出 $H_2(K)=\{0\}$. 此外，当1维闭链是边缘链，即 $c_1=\partial c_2$ 时，它是显然满足的. 因此，凡是1维闭链都是1维边缘链，亦即 $B_1(K)=Z_1(K)$，从而得出 $H_1(K)=Z_1(K)/B_1(K)=Z_1(K)/Z_1(K)=\{0\}$.

例3　设 K 是 Mobius 带的三角剖分，如(图3-15)所示，其定向由顶点顺序 $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 所诱导，计算 K 的各维同调群.

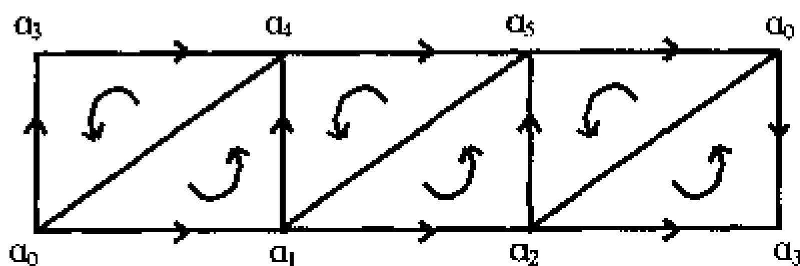


图 3-15

除了 $p=0,1,2$ 之外，其余诸 $H_p(K)=\{0\}$.

K 的2维链的一般形式是 $c_2=g_0(a_0a_3a_4)+g_1(a_0a_1a_4)+g_2(a_1a_4a_5)+g_3(a_1a_2a_5)+g_4(a_0a_2a_5)+g_5(a_0a_2a_3)$，

当它是闭链，即当 $\partial c_2=0$，经简单计算整理即得知这时诸系数满足

$g_i=0(i=0,1,2,3,4,5)$ 因此 $Z_2(K)=\{0\}$. 由于 K 不具3维复形，所以 $B_2(K)=\{0\}$，因此

$$H_2(K)=\{0\}.$$

其次，从直观上可看出1维链 $c_1=1\cdot(a_0a_1)+1\cdot(a_1a_2)+1\cdot(a_2a_3)+1\cdot(a_0a_3)$ 和 $c_1'=1\cdot(a_0a_3)+1\cdot(a_3a_4)+1\cdot(a_4a_5)+1\cdot(a_0a_5)$ 都是闭链（直接计算可知 $\partial c_1=0$，$\partial c_1'=0$），而且 c_1-c_1' 是 K 的边缘链，即 c_1-c_1' 是一个2维链的边缘，直接计算也可得出 $c_1-c_1'=\partial(1\cdot(a_0a_1a_4)+1\cdot(a_1a_2a_5)+1\cdot(a_0a_2a_3)+1\cdot(a_1a_2a_5)+1\cdot(a_1a_4a_5)+1\cdot(a_0a_3a_4))$，因此 $c_1-c_1'\sim 0$，即 $c_1\sim c_1'$. 还可验证任一个1维闭链必定同调于 c_1 的整数倍. 因此1维同调类集合取形式 $\{[gc_1]\mid g\in\mathbf{Z}\}$，所以 $H_1(K)\cong\mathbf{Z}$.

最后，任两个0维基本链 $1\cdot(a_i)$ 与 $1\cdot(a_j)$（i,j 都是从0到5）都是同调的，例如 $1\cdot(a_5)-1\cdot(a_0)=\partial(1\cdot(a_0a_4)+1\cdot(a_4a_5))$. 因此零维同调类的集合取形式 $\{[g(a_0)]\mid g\in\mathbf{Z}\}$，所以 $H_0(K)\cong\mathbf{Z}$.

例4 设 K 是平环的一个剖分（如图3-16(a)所示），计算它的各维同调群.

对任意两个基本零链 $1\cdot(a_i)$ 与 $1\cdot(a_j)$（i,j 从0到5）都是同调的，例如 $1\cdot 9(a_5)-1\cdot(a_0)=\partial(1\cdot(a_0a_3)+1\cdot(a_3a_5))$，因此 K 的零维链的同调类集合 $H_0(K)=\{[g(a_0)]\mid g\in\mathbf{Z}\}$，所以 $H_0(K)\cong\mathbf{Z}$.

当 $p=2$，设 c_2 是 $Z_2(K)$ 的任意成员，由于两个相邻2维单形只有一个公共边，当要求 $\partial c_2=0$ 时，该两个单形的系数必须相等. 例如 $\sigma_1=(a_1a_2a_5)$，$\sigma_2=(a_1a_5a_4)$，由 $c_2=g_1\sigma_1+g_2\sigma_2+\cdots$，则 $\partial c_2=g_1(a_1a_2)+g_1(a_2a_5)+g_1(a_5a_1)+g_2(a_1a_5)+g_2(a_5a_4)+$

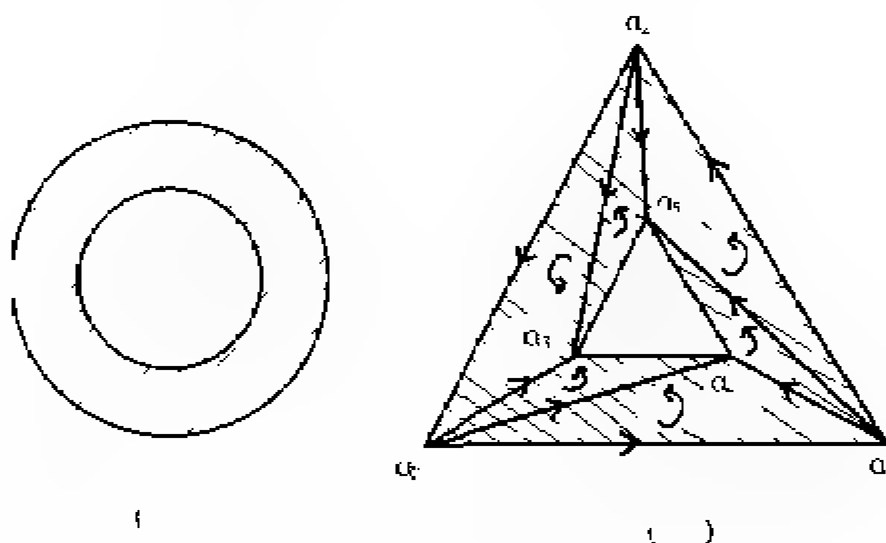


图3.16

$g_2(a_5a_1)+\cdots$，当$\partial c_2=0$（上式中略去不写的各项是与σ_1,σ_2的公共边(a_1a_5)无关者），必须有关系式$g_1=g_2$。因此任意的2维闭链必须取形式$c_2=g\sum_{\sigma_i\in K}\sigma_i$（$\sigma_i$遍取$K$的所有2维定向单形），$g\in \mathbf{Z}$。于是$\partial c_2=0$当且仅当$g\partial(\sum_{\sigma_i\in K}\sigma_i)=0$，亦即$g=0$。因此$Z_2(K)=0$。因为$K$不存在3维单形，故得$H_2(K)=0$。

当$p=1$，设z是$Z_1(K)$的任意成员，如果z中包含内圈的某个边（例如(a_4a_5)）并具系数$g\in \mathbf{Z}$，则可取一个包含(a_4a_5)为边的2维单形（例如$\sigma_1=(a_1a_5a_4)$），则z与$z+g\partial\sigma_1$同调，于是$z'=z+g\partial\sigma_1$不含(a_4a_5)。同理，如果z'包含一项$g'(a_1a_5)$，则可取一个包含(a_1a_5)为一边的2维单形（例如$\sigma_2=(a_1a_2a_5)$），于是z'与$z''=z'-g'\partial(a_1a_2a_5)$同调，如此继续同法处理，即可将$z$中所包含的内圈各边以及各斜边消去，换上一个与$z$同调的$\bar{z}$，其中$\bar{z}$不含内圈的边及诸斜边。这种方法就是把内圈各边挤到外圈边

缘上去 因此得出一个与 z 同调的闭链(不包含除外圈以外的 1 维单形)取形式 $z_1 = g_0(a_0a_1) + g_1(a_1a_2) + g_2(a_2a_0)$，亦即任一个 $z \in Z_1(K)$，$z \sim z_1$ 因此从条件 $\partial z = 0$ 得出 $g_0 = g_1 = g_2$，即 $z \sim gz_1$，此中 $z_1 = (a_0a_1) + (a_1a_2) + (a_2a_0)$ 因此 $H_1(K)$ 是同调类集合 $\{[gz_1] \mid g \in \boldsymbol{Z}\}$，所以 $H_1(K) \sim \boldsymbol{Z}$.

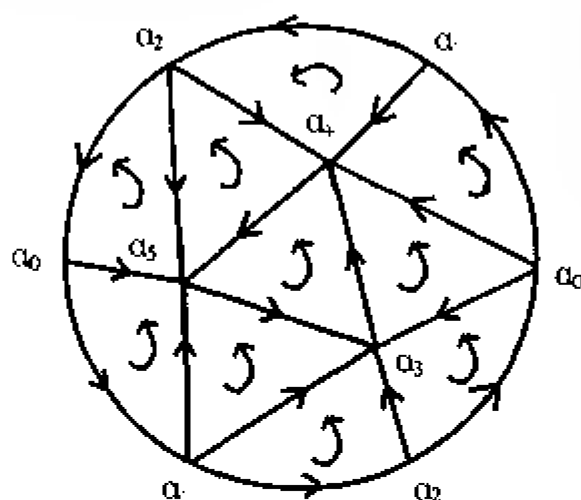


图 3 17

例 5 射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$ 可从圆盘的每对对径点恒同起来而得出，它的一个三角剖分如(图 3 · 17)所示 计算 $\boldsymbol{RP}^2$ 的各维同调群.

当 $p<0$ 或 $p>2$，显然 $H_p(\boldsymbol{RP}^2) \sim \{0\}$. 对任两个顶点 a_i，a_j (i，j 从 0 到 5)，它们总可以用 1 维单形连接起来，所以 $a_i \sim a_j (i \neq j)$，因此任两个顶点都属于同一个同调类 所以有 $H_0(\boldsymbol{RP}^2) \sim \boldsymbol{Z}$. 当 $p = 2$，如例 4，可得出 $H_2(\boldsymbol{RP}^2) \sim \{0\}$. 事实上，每个 1 维单形恰是两个 2 维单形的公共边. 设外圈诸 1 维单形为Ⅰ型，而其余 1 维单形为Ⅱ型 假设 2 维链 c_2 是闭链，即当 $c_2 \in Z_2(\boldsymbol{RP}^2)$，则 ∂c_2 中Ⅱ型单形的系数必相等，而Ⅰ型单形的系数恰好是 2，因此 $\partial c_2 = 2g(a_0a_1) + 2g(a_1a_2) + 2g(a_2a_0)$. 当 $\partial c_2 = 0$，则仅当 $g = 0$，因此 $Z_2(\boldsymbol{RP}^2) = \{0\}$. 因为 $\boldsymbol{RP}^2$ 没有 3 维单形，因此 $H_2(\boldsymbol{RP}^2) = Z_2(\boldsymbol{RP}^2) = \{0\}$ 不难看出 1 维闭链必取形式 $z_1 = g(a_0a_1) + g(a_1a_2) + g(a_2a_0)$，它的 2 倍恰好等于零链，而且 $\partial(\sum\sigma^2$

i 遍历所有的 2 维单形）$=2z$，即闭链 z 的 2 倍是边缘链，因此 $B_1(RP^2)\cong 2Z$。从此得出 $H_1(RP^2)\cong Z/(2Z)=Z_2$。

例 6　环面 T_2 有一个三角剖分如(图 3-18)所示(图中相同标号的顶点粘合起来即与 T_2 同胚)，计算 T_2 的各维同调群。

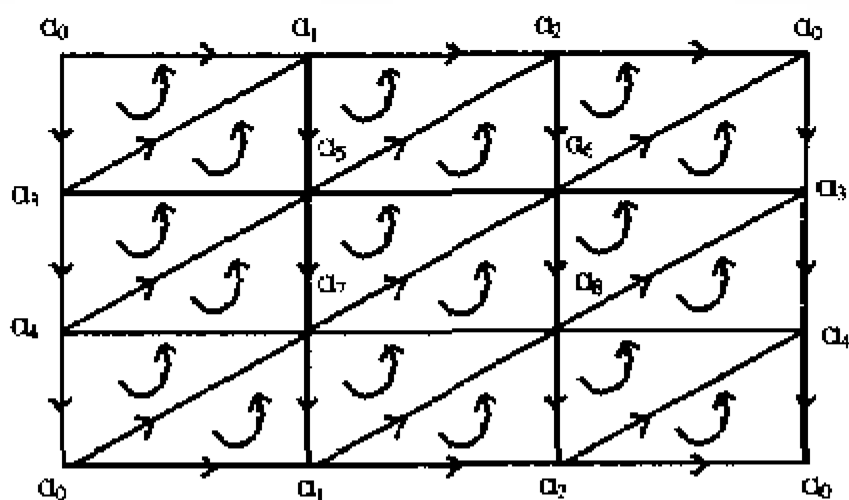


图 3-18

记 $c_1=(a_0a_1)+(a_1a_2)+(a_2a_0)$，$c_2=(a_0a_3)+(a_3a_4)+(a_4a_0)$，$c_2=\sum_i \sigma_i$（$i$ 遍历所有的 2 维定向单形）。

如同以前各例所述，容易得出 $H_p(T_2)\cong\begin{cases}0, & p<0 \text{ 或 } p>2\\ Z, & p=0 \text{ 或 } p=2\end{cases}$，而 1 维同调类可表为 $[z]=g_1[c_1]+g_2[c_2]$，$g_1,g_2\in Z$。当它为零仅当 $g_1=g_2=0$，从此得出 $H_1(T_2)\cong Z\oplus Z$。

例 7　Klein 瓶的一个三角剖分如(图 3-19)所示，计算 K 的各维同调群。

令 $c_1=(a_0a_1)+(a_1a_2)+(a_2a_0)$，

$c_2=(a_0a_3)+(a_3a_6)+(a_6a_0)$，

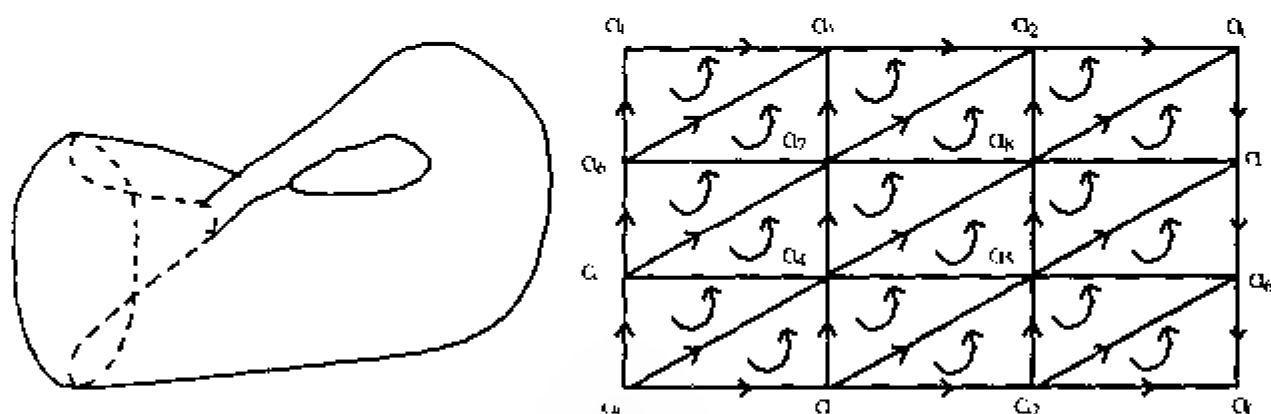


图 3 19

$c_2 = \sum\limits_i \sigma_i$（$i$ 遍历所有的 2 维定向单形）

显然有 $H_p(K) \cong 0$，$p<0$，$p>2$ 如同上例所述，$H_0(K) \cong Z$ 其次，因为每个 1 维闭链都同调于形式为 $c = nc_1 + mc'_1$ 的闭链（此中 n、$m \in Z$）。当 c 是某个 2 维链 d 的边缘，则 $d = pc_2$、$p \in Z$ 因此 $\partial d = 2pc_1$，从而得出闭链 $c = nc_1 + mc'_1$ 同调于零（即 $nc_1 + mc'_1 = 2pc'_1$）当且仅当 n 等于零而且 m 为偶数；亦即 1 维闭链的同调类同构于 $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$ 最后、K 的 2 维闭链必须取形式 pc_2，$p \in Z$；而 $\partial(pc_2) = 2pc_1 \neq 0$，所以 pc_2 不是闭链，因此 $H_2(K) \cong 0$.

例 8 对 $n(>1)$ 维单形 σ^n，计算 $K_1 = Cl\sigma^n$ 和 $K_2 = Bd\sigma^n$ 的各维同调群

(1) 对 $K_1 = Cl\sigma^n$，不难看出 $H_p(K_1) \cong \begin{cases} 0, & p<0 \text{ 或 } p>n \\ Z, & p=0 \end{cases}$；

当 $0 < p < n$，对任意的 $z \in Z_p(K_1)$，如同例 4 计算 $H_1(K)$ 的方法，可以找到 $z' \in Z_1(K_1)$ 使得 $z \sim z'$. 而且 z' 中出现的定向单形都以某个取定的顶点（如图 3 - 20 的 a_0）为单形的一个顶点 这时若 z' 中出现 p 维单形的项是 $g(a_0 \cdots a_p)$，则当 $\partial z' = 0$，即得出

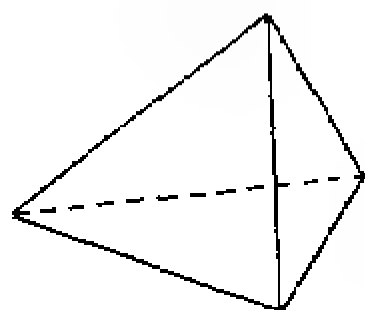


图 3-20

g 0 因此 $z=0$, 所以 $Z_p(K)=B_p(K_1)$, 从而得出 $H_p(K_1)=0$. 对 $p=n$, 这时 $C_n(K)=Z\sigma^n$, 而 $\partial\sigma^n\neq 0$, 所以 $Z_n(K_1)=0$, 从有 $H_n(K_1)=0$.

(ii) 对 $K_2=Bd\sigma^n$, 这时 K_2 的任意 $n-1$ 维闭链当然也是 K_1 的 $n-1$ 维闭链 z, 由(i) $Z_{n-1}(K_1)=B_{n-1}(K_1)$所以存在 $g\sigma^n\in C_n(K_1)$使 $z=g\partial\sigma^n$, 而 $\partial\sigma^n$ 是 K_1 的一条 $n-1$维闭链, 也是 K_2 的 $n-1$ 维闭链, 所以 $Z_{n-1}(K_2)=Z(\partial\sigma^n)$, 这时 $B_{n-1}(K_2)=0$, 从而得出 $H_{n-1}(K_2)\simeq Z$. 对于 $p<n-1$, $H_p(K_2)\cong H_p(K_1)$, 因此

$$H_p(K_2)\simeq\begin{cases}Z, & p=0, n-1;\\ 0, & p\neq 0, n-1\end{cases}$$

注　从这个例子, 由于 $|Cl\sigma^n|\simeq B^n$, $|Bd\sigma^n|\simeq S^{n-1}$, 因此得出 n 维球体和 n 维球面的各维同调群.

定义　设 K 是一个复形, v 是一点, 它与 K 的诸顶点的集合是几何独立的. 对任一个 p 维单形 $\sigma^p\in K$, 记 $v\sigma^p$ 为以 σ^p 为面的定向单形. 例如 $\sigma^p=(a_0\cdots a_p)$, 则 $v\sigma^p=(va_0\cdots a_p)$. 于是得到复形 $vK=K\cup\{v\}\cup\{v\sigma|\sigma\in K\}$, 它称为 K 上以 v 为顶点的**锥形**.

对 p 维链 $c_p=\sum\limits_i g_i\sigma_i^p\in C_p(K)$, 则 $p+1$ 维链 $vc_p=\sum\limits_i g_i(v\sigma_i^p)$称为 c_p 上的锥形.

引理　$\partial(vc_p)=c_p-v(\partial c_p)$, $c_p\in C_p(K)$.

证明　设 $c_p=(a_0\cdots a_p)$, 则 $vc_p=(va_0\cdots a_p)$

$$\partial(va_0\cdots a_p)=(a_0\cdots a_p)+\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}(va_0\cdots\hat{a}_i\cdots a_p)$$

$$(a_0\cdots a_p)-v\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots a_p)=c_p-v\partial c_p.$$

通过线性扩充，得知引理成立. ▌

例 9　设 vK 是复形 K 上的锥形. 计算 vK 的各维同调群.

当 $p<0$ 或 $p>\dim(vK)$, $H_p(vK)=0$; $H_0(vK)\cong \mathbf{Z}$. 至于 $0<p\leqslant\dim(vK)$, 则任一闭链 $z_p\in Z_p(vK)$ 可表为 $z_p=c_1+vc_2$, 其中 $c_1\in C_p(K)$, $c_2\in C_{p-1}(K)$. 因此 $\partial z_p=\partial c_1+c_2-v\partial c_2=0$ 时应满足 $\partial c_2=0$, 从而 $c_2=-\partial c_1$. 因此 $z_p=c_1-v\partial c_1=\partial(vc_1)$, 即 $z_p\in B_p(vK)$, 亦即有 $Z_p(vK)=B_p(vK)$, 所以 $H_p(vK)=0$.

§3　单纯同调群的结构

对于定向复形 K, 假设它具 α_p 个 p 维单形, 则 $C_p(K)$ 与 $Z\oplus\cdots\oplus Z$ (α_p 个加项)同构, 即 $C_p(K)$ 是 α_p 个生成元的自由交换群. 由于自由交换群的每个子群也是自由交换群, 于是 $Z_p(K)$ 和 $B_p(K)$ 都是自由交换群, 而商群 $H_p(K)=Z_p(K)/B_p(K)$ 却不一定是自由的. 根据有限生成的自由交换群的分解定理(参见附录)

$$H_p(K)\cong G\oplus T_1\oplus\cdots\oplus T_k,\tag{3.1}$$

其中 G 是自由的, 而诸 T_i 是有限阶(θ_i^p 阶)循环群. 直和 $T_1\oplus\cdots\oplus T_K$ 称为 $H_p(K)$ 的**扭转子群**, 或**挠子群**. 式(3.1)就是 K 的 p 维同调群的表现形式.

定义　式(3.1)中 G 的秩称为复形 K 的 p **维 Betti 数**; 而诸 T_i 的阶 θ_i^p $(i=1,2,\cdots,k)$ 称为 K 的 p **维扭转系数**.

我们要指出, 定向单纯复形的同调群与它的诸单形的定向选择无关.

定理　设 K 是给定的复形，而 K_1 与 K_2 是相应于 K 的不同的定向复形，则对每个维数 p，同调群 $H_p(K_1)$ 与 $H_p(K_2)$ 是同构的．

证明　对 K 的每个 p 维单形 σ^p，以 $^1\sigma^p$ 和 $^2\sigma^p$ 分别表示 σ^p 在 K_1 和 K_2 中的正定向 p 维单形．于是在 K 的单形 σ^p 上存在一个函数 α 使得 $^1\sigma^p=\alpha(\sigma^p)^2\sigma^p$，其中 $\alpha(\sigma^p)=+1$ 或 -1 视 $^1\sigma^p$ 与 $^2\sigma^p$ 诸顶点顺序是互为偶排列或奇排列而定．从此定义同态序列 $\varphi=\{\varphi_p\}$：

$$\varphi_p: C_p(K_1)\to C_p(K_2)$$

为　$\varphi_p(\sum_i g_i{}^1\sigma_i^p)=\sum_i\alpha(\sigma_i^p)g_i{}^2\sigma_i^p$，

其中 $\sum_i g_i{}^1\sigma_i^p$ 表示 K_1 上的一个 p 维链．

注意到若 $^1\sigma^p=(a_{i_0}\cdots a_{i_k}\cdots a_{i_p})$，$^2\sigma^p=(a_{j_0}\cdots a_{j_k}\cdots a_{j_p})$ 之间满足 $^1\sigma^p=\alpha(\sigma^p)^2\sigma^p$，则 $^1\sigma_k^{p-1}=(a_{i_0}\cdots\hat{a}_{i_k}\cdots a_{i_p})=\pm(a_{j_0}\cdots\hat{a}_{j_k}\cdots a_{j_p})=\pm{}^2\sigma_k^{p-1}$，取正号或负号视 $^1\sigma^p=\alpha(\sigma^p)^2\sigma^p$ 所取符号为正或负而定．我们记 $^1\sigma_k^{p-1}=\alpha(\sigma_k^{p-1})^2\sigma_k^{p-1}$，其中 $\alpha(\sigma_k^{p-1})=\alpha(\sigma^p)$．

对 K 上每个基本 p 维链 $g^1\sigma^p(p\geq1)$，

$\varphi_{p-1}\partial(g^1\sigma^p)=\varphi_{p-1}(g\sum_k(-1)^k(^1\sigma_k^{p-1}))$

$=g\sum_k(-1)^k\alpha(\sigma_k^{p-1})(^2\sigma_k^{p-1})=g\alpha(\sigma^p)\sum_k(-1)^k(^2\sigma_k^{p-1})$，

$\partial\varphi_p(g(^1\sigma^p))=\partial g\alpha(\sigma^p)(^2\sigma^p)=g\alpha(\sigma^p)\sum_k(-1)^k(^2\sigma_k^{p-1})$，因此关系式 $\varphi_{p-1}\partial=\partial\varphi_p$ 成立．由于 φ 与 ∂ 均具线性性质，因此下列图解可交换

$$\begin{array}{ccc} C_p(K_1) & \xrightarrow{\varphi_p} & C_p(K_2) \\ \partial\downarrow & & \downarrow\partial \\ C_{p-1}(K_1) & \xrightarrow[\varphi_{p-1}]{} & C_{p-1}(K_2) \end{array}$$

当 $z_p \in Z_p(K_1)$，则 $\partial\varphi_p(z_p)=\varphi_{p-1}\partial(z_p)=\varphi_{p-1}(0)=0$，所以 $\varphi_p(z_p)\in Z_p(K_2)$．因此 $\varphi_p(Z_p(K_1))\subset Z_p(K_2)$．

当 $\partial(c_{p+1})\in B_p(K_1)$，则 $\varphi_p\partial(c_{p+1})=\partial\varphi_{p+1}(c_{p+1})$，因此 $\varphi_p\partial(c_{p+1})\in B_p(K_2)$．从而 φ_p 把 $B_p(K_1)$ 映入 $B_p(K_2)$，从此诱导出从商群 $H_p(K_1)=Z_p(K_1)/B_p(K_1)$ 到 $H_p(K_2)=Z_p(K_2)/B_p(K_2)$ 的同态 φ^*，对 $H_p(K_1)$ 中每个同调类 $[z_p]$，由 $\varphi^*([z_p])=[\varphi_p(z_p)]$ 所决定．

将上述过程中，把 K_1 与 K_2 对调，同理导出一个同态序列 $\psi=\{\psi_p: C_p(K_2)\to C_p(K_1)\}$，从此得出 ψ^*，它与 φ^* 互逆，即满足关系式 $\psi^*\varphi^*=id^*_{K_1}$ 且 $\varphi^*\psi^*=id^*_{K_2}$，因此对每个维数 p，$\varphi^*_p: H_p(K_1)\to H_p(K_2)$ 是同构．∎

复形 K 的零维同调群与 $|K|$ 的连通性密切相关；为此，我们先引进下述概念：

定义　设 K 是一个复形，其中两个单形 σ_1 与 σ_2，满足下列条件：

(ⅰ) $\sigma_1\cap\sigma_2\neq\emptyset$；

(ⅱ) 存在 K 的 1 维单形 $\sigma^1_1,\sigma^1_2,\cdots,\sigma^1_p$，使得 $\sigma_1\cap\sigma^1_1$ 是 σ_1 的一个顶点，$\sigma_2\cap\sigma^1_p$ 是 σ_2 的一个顶点，而且对 $1\leqslant i<p$，$\sigma^1_i\cap\sigma^1_{i+1}$ 是 σ^1_i 与 σ^1_{i+1} 的公共顶点，则称 σ_1 与 σ_2 是**连通的**．

这个连通的概念是一个等价性关系，它的等价类称为复形 K 的一个**组合连通分支**．当 K 只有一个组合连通分支，则称该复形 K 是**连通的**．

不难验证复形 K 的组合连通分支与 K 的几何承载 $|K|$ 的连通分支是恒同的．

定理　设 K 是具 r 个组合连通分支的复形，则 $H_0(K)$ 与 r 个整数群 $\mathbf{Z}$ 的直和同构．

证明　设 K_l 是 K 的一个组合连通分支，而(a^l)是 K_l 中一个 0 维单形，于是对 K_l 中任一个 0 维单形(b^l)，存在着从 b^l 到 a^l 的 1 维单形序列$(b^l a_0),(a_0 a_1),\cdots,(a_p a^l)$使得相邻两个 1 维单形仅具一个公共顶点. 我们在这个 1 维单形序列上定义一个 1 维链 c_1. 它在每个 1 维单形上取系数 g 或 $-g(g\in Z)$视该单形是否取正定向而定. 因此$\partial(c_1)=g(b^l)-g(a^l)$或$\partial(c_1)=-g(b^l)+g(a^l)$. 这表示任一基本 0 维链 $g(b^l)$同调于 $g(a^l)$或 $-g(a^l)$. 从而得出 K_l 上任一个 0 维链同调于基本 0 维链 $g_l(a^l)$, $g_l\in Z$.

对 K 的 r 个组合连通分支 $K_1,\cdots,K_r$ 作同样考虑，得出每个 $K_i(i=1,\cdots,r)$上有一个顶点(a^i)，使得 K_i 上任一 0 维链(是闭链)同调于 $g_i(a^i)$, $g_i\in Z$. 因此 K 上任一 0 维闭链 c_0，存在整数 $g_1,\cdots,g_r$，使得 $c_0\sim\sum_{i=1}^{r}g_i(a^i)$.

我们还要指出，在同调意义之下，表达式是唯一的：假如有两个 0 维链$\sum_i h_i(a^i)$与$\sum_i g_i(a^i)$代表同一个同调类，则存在 1 维链 c_1 使得$\sum_i(g_i-h_i)(a^i)=\partial(c_1)$. 对 $i\neq j$, a^i 与 a^j 分别属于不同的组合连通分支，因此上式成立仅当对每个 i, $g_i=h_i$. 证明了 $H_0(K)$ 中每个同调类$[c_0]$具唯一表达式$\sum_i g_i(a^i)$, $g_i\in Z$. 因此对应

$$\sum_i h_i(a^i)\to(h_1,\cdots,h_r)$$

表明 $H_0(K)$与群 Z 的 r 个直和之间的同构. ▌

推论　如果多面体 $|K|$ 具 r 个连通分支，则 K 的同调群 $H_0(K)$与 r 个 Z 的直和同构. 特当$|K|$是连通的，则 $H_0(K)\cong Z$.

▌

注　在定义同调群的过程中，我们可用任意的交换群 G 代替整数群 Z 的成员作为系数，因此前面所讨论的同调群有时也明确

地称之为**整同调群**,记为 $H_p(K;Z)$.特当系数群取模 2 整数加群 Z_2,这时 $-1=+1$,因此定向不起作用,我们记复形 K 的 p 维**模 2 同调群**为 $H_p(K;Z_2)$.

§4 Euler - Poincaré 定理

设 $|K|$ 是一个线性多面体与 2 维球面 S^2 同胚,具有 V 个顶点,E 条棱和 F 个 2 维面,则有 $V-E+F=2$.这就是著名的 Euler 定理.Poincaré 把这个结果推广到一般的多面体去.为了介绍这方面的内容,先引进下面的概念.

定义 设 K 是定向复形,一族 p 维闭链 $\{z_p^1,\cdots,z_p^r\}$,如果不存在非全为零的整数 $g_1,\cdots,g_r$ 使得链 $\sum_{i=1}^{r} g_i z_p^i$ 同调于零,则称该族闭链**关于同调是线性无关的**,或 mod $B_p(K)$ **线性无关**.关于同调是最大线性无关的 r 个 p 维闭链,其最大整数 r 记为 $\beta_p(K)$,称为复形 K 的 p 维 Betti 数.

定理(Euler - Poincaré) 设 K 是 n 维定向复形,α_p 表示 K 的 p 维单形的个数($p=0,1,\cdots,n$),则

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\alpha_p=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p(K),$$

其中 $\beta_p(K)$ 表示 K 的 p 维 Betti 数.

证明 设 $\{d_p^i\}$ 是 p 维链的最大集合,满足它们的线性组合不是闭链的条件.令 C_p 表示 p 维链构成的线性空间.由 $\{d_p^i\}$ 张成的 C_p 的线性子空间记为 D_p,以 Z_p 表示 p 维闭链构成的 C_p 的线性子空间.则 $D_p\cap Z_p=\{0\}$.因此

$$\alpha_p = \dim C_p - \dim D_p + \dim Z_p,$$

或即 $\dim Z_p = \alpha_p - \dim D_p, 1 < p < n$.

令 $b'_p = \partial(d'_{p+1})(p=0,\cdots,n-1)$，则集合 $\{b'_p\}$ 构成 p 维边缘链构成的 C_p 的线性子空间的基底. 设 $\{z^i_p\}(i=1,\cdots,\beta_p)$ 是 mod B_p 线性无关的 p 维闭链的最大集合，则这些闭链张成 Z_p 的子空间 G_p，因此 $Z_p = G_p \oplus B_p (0 \leqslant p \leqslant n-1)$. 由于 $\beta_p = \dim G_p$，从而有

$$\dim Z_p = \dim G_p + \dim B_p = \beta_p + \dim B_p,$$

于是有

$$\beta_p = \dim Z_p - \dim B_p = \alpha_p - \dim D_p - \dim B_p, (1 \leqslant p < n-1) \quad (1)$$

由于 d_{p+1} 的个数与 b'_p 的个数相同，因此有

$$\dim D_{p+1} = \dim B_p \quad (2)$$

注意到 $\dim B_n = 0$，而

$$\beta_0 = \dim Z_0 - \dim B_0 = \alpha_0 - \dim B_0 \quad (3)$$

$$\beta_n = \dim Z_n = \alpha_n - \dim D_n \quad (4)$$

取代数和 $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p$，利用式(1)—(4)，则 $\dim B_i$ 与 $\dim D_i$ 各项两两消去，从而得出

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\alpha_p. \ ▌$$

定义　设 K 是 n 维复形，则 $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p$ 称为 K 的 Euler 示性数，记为 $\chi(K)$

几种多面体的 Euler 示性数如下：

多面体	球面 S^2	环面 T^2	$\boldsymbol{RP}^2$	Klein 瓶	锥形 C
示性数	2	0	1	0	1

今后将证明同调群，因而示性数 χ 是拓扑不变量，所以可用

它来区分不同胚的空间．例如 $\chi(S^2)=2$，而 $\chi(T^2)=0$，所以 $S^2\not\cong T^2$．然而具相同的示性的两个空间却不一定同胚．例如锥形 C 和 2 维实射影平面 RP^2 的示性数都是 1，但是 $C\not\cong RP^2$．这表明拓扑不变量示性数 χ 不可以作为判别空间是否同胚的准则．

在此介绍 Euler - Poincaré 定理的一些应用．

定义　3 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的**线性多面体**是由凸多边形包围的立体，边界多边形称为**面**，相邻两个面的交集称为棱，相邻两条棱的交集称为**顶点**．一个线性多面体，它的边界与一个 2 维球面 S^2 同胚者，称为一个**简单多面体**．当线性多面体的面是正多边形而且它的多面角均相等者，称为一个**正多面体**．

定理　(Euler 定理)设简单多面体 S 具 V 个顶点，E 条棱和 F 个面，则

$$V-E+F=2$$

证明　由于简单多面体 S 与球面 S^2 同胚，而 S^2 的各维 Betti 数由§3 的例 8 可知 $\beta_0(S^2)=1,\ \beta_1(S^2)=0,\ \beta_2(S^2)=1$，因此 $\chi(S^2)=\sum\limits_{p=0}^{2}(-1)^p\beta_p=2$．因为往后将证明复形的 Betti 数，因而示性数是拓扑不变量，所以简单多面体 S 的示性数也等于 2．

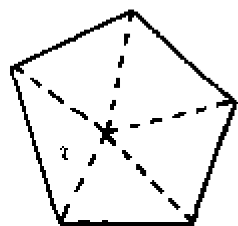


图 3-21

上述结论是建立在简单多面体的三角剖分所构成的复形的几何承载与球面同胚之上，然而 S 的面是多边形(不一定是三角形)，假设有一个面 σ_1 是 n_0 边形($n_0>3$)，如(图 3-21)所示，可在 σ_1 中任取一点 τ，将它与诸 n_0 个顶点连接，便得到 σ_1 的三角剖分．σ_1 经过剖分后 S 的顶点多了一个即 $V+1$；而棱多了 n_0 条，所以棱数变为 $E+n_0$，面则多了(n_0-1)个，即$(F+n_0-1)$个．因此

剖分后各维单形个数的代数和 $\chi(S)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=(V+1)-(E+n_0)+(F+n_0-1)=V-E+F=2$, 表明剖分前后示性数保留不变 ▌

定理 简单正多面体只有五种

证明 假设简单正多面体 S 具有 V 个顶点, E 条棱和 F 个面. 设通过每个顶点有 m 条棱, 而每个面有 n 条棱 注意到面至少为三边形, 所以 $n\geqslant 3$. 由正多面体定义, 它的棱数满足关系式

$mV=2E=nF$. 根据 Euler 定理, $V-E+F=2$, 因此

$\frac{nF}{m}-\frac{nF}{2}+F=2$ 或即

$$F(2n-mn+2m)=4m \tag{1}$$

因此必须有关系式 $2n-mn+2m>0$.

由于 $n\geqslant 3$, 所以 $2m>n(m-2)\geqslant 3(m-2)=3m-6$. 从此得出 $m<6$ 所以 m 只可以取 1 到 5 五种值. 其次, $m>2$, 根据 m,n,F 所满足的关系式(1)和 $n\geqslant 3$, $m<6$, 即可得出 (m,n,F) 只有五组可能取值: (i)(3,3,4); (ii)(3,4,6); (iii)(4,3,8); (iv)(3,5,12); (v)(5,3,20). 相应的正多面体即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体(见图 3-22) 它们通过每个顶点的棱数 m, 每个面的棱数, 顶点数、棱数和面数如下表

m	n	V	E	F
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

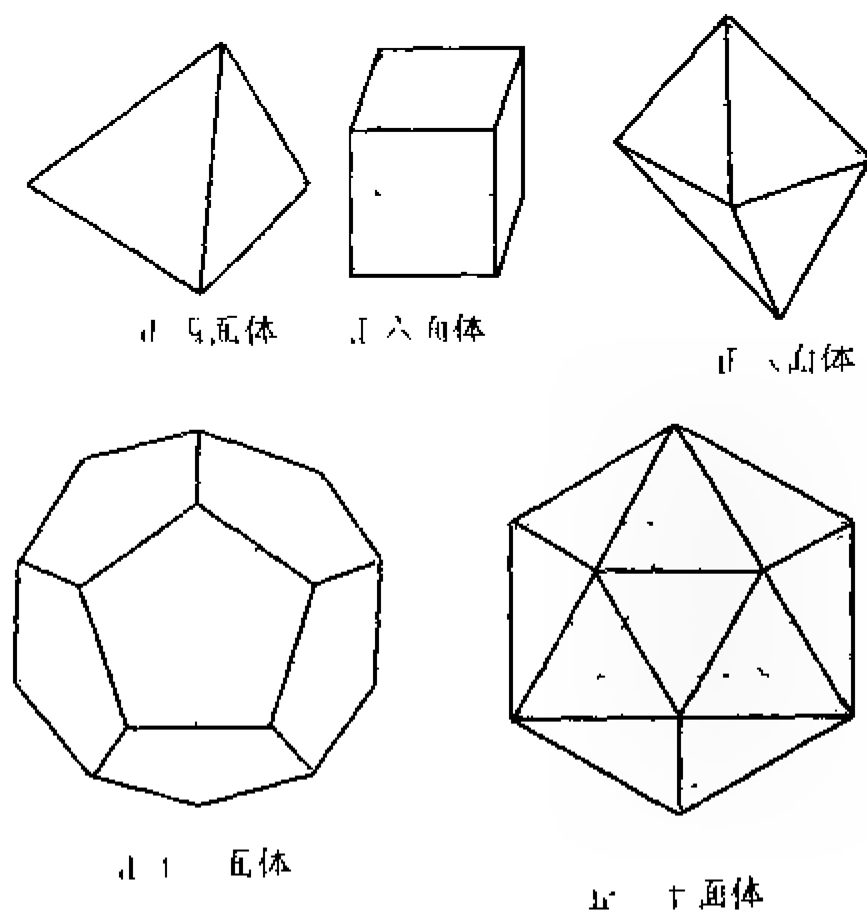


图 3-22

定义　设 K 为一复形，具下列性质：

(i)　K 的每个单形是 K 的某个 n 维单形的一个面，即 K 具**纯粹性**；

(ii)　每个 $(n-1)$ 维单形恰是 K 的两个 n 维单形的公共面，即 K 具**无分支性**；

(iii)　对 K 的任一对 n 维单形 σ_1^n 与 σ_2^n，存在一个 n 维单形的序列，以 σ_1^n 开始，并以 σ_2^n 终止，使得序列中相邻两个 n 维单形恰有一个公共的 $(n-1)$ 维面，即 K 具**强连通性**；

这样的复形 K 称为一个 n **维伪流形**.

例如§3的射影平面、环面、Klein 瓶、n 维单形 σ^n 的边缘复形 $Bd\sigma^n$ $(n>1)$ 等的三角剖分都是伪流形

定理　设 K 是 2 维伪流形，具 α_0 个顶点，α_1 个 1 维单形和 α_2 个 2 维单形，则

(i)　$3\alpha_2=2\alpha_1$;

(ii)　$\alpha_1=3(\alpha_0-\chi(K))$;

(iii)　$\alpha_0\geqslant\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24\chi(K)})$.

证明　因为每个 1 维单形恰是两个 2 维单形的公共面，设 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 分别表示 K 的 0 维、1 维和 2 维单形的个数，而每个 2 维单形的边缘是 3 个 1 维单形，因此有 $3\alpha_2=2\alpha_1$。其次，Euler Poincare 定理指出 $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=\chi(K)$，于是有 $\alpha_0-\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_1=\chi(K)$，因此 $\alpha_1=3(\alpha_0-\chi(K))$。最后，注意到 $\alpha_0\geqslant4$，设以 $C_2^{\alpha_0}$ 表示 α_0 个顶点，每次取两个的组合数，则 $\alpha_1\leqslant C_2^{\alpha_0}=\frac{1}{2}\alpha_0(\alpha_0-1)$，由(i)得出 $6\alpha_2=4\alpha_1$，而 $\alpha_0(\alpha_0-1)\geqslant2\alpha_1=6\alpha_1-6\alpha_2$，因此有

$$\alpha_0^2-\alpha_0-6\alpha_0\geqslant6\alpha_1-6\alpha_2-6\alpha_0=-6\chi(K).$$

$$\alpha_0^2-7\alpha_0\geqslant-6\chi(K).$$

$$4\alpha_0^2-28\alpha_0+49\geqslant49-24\chi(K).$$

或
$$(2\alpha_0-7)^2\geqslant49-24\chi(K).$$

因此有
$$\alpha_0\geqslant\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24\chi(K)})\quad\blacksquare$$

这个定理对多面体的三角剖分所构成的伪流形，决定各维数单形的最少个数是很有用的。

例 1　对 2 维球面 S^2，因为 $\chi(S^2)=2$，因此 $\alpha_0\geqslant\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24\chi(S^2)})=4$；$\alpha_1=3(\alpha_0-\chi(S^2))\geqslant3(4-2)=6$；$\alpha_2=\frac{2}{3}\alpha_1\geqslant\frac{2}{3}\times6=4$

例2 对射影平面 RP^2，这时 $\chi(RP^2)=1$，因此 $\alpha_0\geqslant\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24})=6$；$\alpha_1\geqslant3(6-1)=15$；$\alpha_2\geqslant\frac{2}{3}\times15=10$ 这也说明为何多面体的三角剖分要保证足够数目的三角形，例如§1例4所述（参阅图3-8和图3-9）.

在这一节最后，我们对 n 维伪流形 K 给出一个重要的概念：如果 K 存在一个 n 维定向单形的基本组 $\{\sigma_i^n \mid i=1,2,3\cdots,\alpha_n\}$，使得每个定向 $(n-1)$ 维单形恰是一个定向 n 维单形的顺向面，同时又是另一个定向 n 维单形的逆向面（这由每个 $n-1$ 维单形恰是 K 中两个 n 维单形的公共面所保证），则称 K 是**可定向的**，该基本组 $\{\sigma_i^n\}$ 即称为 K 的一个**定向**. 否则称 K 是**不可定向的**. 例如§2例6(图3-18)可知环面是可定向的；而§2例5(图3-17)，可知射影平面是不可定向的. 我们有下面的结论：

定理 一个 n 维伪流形 K 是可定向的，当且仅当它的 n 维同调群 $H_n(K)$ 不是平凡群.

证明 假设 K 是可定向的，则存在 K 中诸 n 维单形的定向，使得它的任一个 $(n-1)$ 维面 σ^{n-1} 恰恰是两个单形 σ_1^n 与 σ_2^n 的公共面，而且 $\partial\sigma_1^n$ 与 $\partial\sigma_2^n$ 中包含 σ^{n-1} 的项，有一个取正号，而另一个取负号. 这蕴涵任一个遍历 K 的诸 n 维定向单形的 n 维链 $c=\sum_{i=1}^{\alpha_n}g_i\sigma_i^n$，$g_i\in Z$ 是闭链，则诸 g_i 必相等. 亦即 $c=\sum_{i=1}^{\alpha_n}g\sigma_i^n$ 是 n 维闭链，显然它非零链，即当 $g\neq0$，$c\neq0$. 由于 $B_n(K)=\{0\}$，因此 $H_n(K)\neq\{0\}$.

反之，当 $H_n(K)\neq\{0\}$，假设 $z=\sum_{i=1}^{\alpha_n}g_i\sigma_i^n$ 是一个非零的 n 维闭链，由于 K 中每对 n 维单形可由一序列的 n 维单形连接起来，而

且每个$(n-1)$维单形恰恰是两个n维单形的公共面，因此当$\partial z=0$，则z中任两个系数必定只差一个符号，也可以说，一切$g=\pm g$．于是，当某个σ_i^n的系数$g_i=-g$时，则该σ_i^n的定向不变，而当σ_i^n的系数$g_i=-g$时，则将σ_i^n的定向改变，于是我们得到一个n维闭链$c^1=\sum_{i=1}^{\alpha_n}g\cdot\sigma_i^n$，此中固定的$g\in Z$．这时$c'=\sum_{i=1}^{\alpha_n}1\cdot\sigma_i^n$是$n$维闭链，这意味着每个$(n-1)$维单形出现两次而且符号相反，表明它恰恰是某个$n$维单位$\sigma_i'$的顺向面，同时又是另一个$n$维单形$\sigma_i^n$的逆向面．因此$K$是可定向的 ▌

推论　一个n维伪流形K是不可定向的，当且仅当$H_n(K)=\{0\}$． ▌

注　以下的概念和结论，只叙述而不加证明．可参阅 W S Massey, Algebraic Topology, An Introduction (1967)或 H Seifert and W Threlfall, Lehrbuch der Topologie（江泽涵译，拓扑学 1949）

定义　设S_1与S_2是互不相连的闭曲面，将每个曲面S_i切除一个小圆盘D_i的内部 Int $D_i(i=1,2)$，再将S_i沿D_1，D_2的边界粘起来，所得到的曲面称为S_1与S_2的**连通和**

定理1　任一个紧致可定向曲面同胚于球面或环面的连通和．而任一个不可定向的曲面同胚于一个射影平面或 Klein 瓶与一个紧致可定向曲面的连通和

定理2　两个闭曲面同胚的充要条件是它们的 Euler 示性数相等，而且它们都是可定向或者不可定向的

这说明利用同调群可判别两个闭曲面是否同胚，亦即利用同调群可将闭曲面进行拓扑分类

§5　同调群的拓扑不变性

我们已经对多面体引进单纯同调群这个代数结构．然而最重要的还须证明同调群具有拓扑不变性，这是利用同调群刻划多面体的拓扑性质的基础．在这一节的最后将指出，当多面体$|K|$与$|L|$同胚，则对每个维数p，$H_p(K)$与$H_p(L)$同构．然而反过来却不成立，在前一节已经指出．关于单纯同调群具拓扑不变性的证明，是要花费一定篇幅的．我们在此加以介绍．

同胚是特殊的连续映射，因此我们自然要从考虑多面体$|K|$到$|L|$的连续映射出发，而与多面体联系的单纯同调群却是建立在多面体的三角剖分所构成的单纯复形之上．因此相应地要考虑单纯复形K到L的映射，由于复形是建立在单形的基础上，因此自然地要考虑K的单形到L的单形的映射．如下面图表所示

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{f} & |L| \\ {\scriptstyle\varphi_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_L} \\ K & \xrightarrow[\tilde{f}]{} & L \end{array}$$

以φ_K和φ_L分别表示$|K|$与$|L|$的三角剖分，f表示连续映射，则f诱导出K到L的映射$\tilde{f}$．因此在证明同调群的拓扑不变性过程中，首先对给定的连续映射$f: |K|\to|L|$，要引进f诱导的从K到L的单形间的映射，即所谓单纯映射$\tilde{f}$，或称为给定的f的单纯逼近．为了保证单纯逼近的存在性，我们还要引进单形的重心重分以及链重分映射的概念．此中还必须证明对同一个连续映射，不

间的单纯逼近以及重分映射诱导出同调群之间的相应的同态，最后得出单纯同调群的同伦不变性，因此便完成同调群的拓扑不变性的证明。在上述诸证明过程中，关键的依据是链映射和链同伦的概念。

定义　设 K 与 L 是复形，而 $\{\varphi_p\}$ 是一个同态序列

$$\varphi_p: C_p(K)\to C_p(L)\ (p\geq 0)$$ 满足

$$\partial\varphi_p = \varphi_{p-1}\partial,\ p\geq 1 \tag{1}$$

则称 $\{\varphi_p\}$ 是从 K 到 L 的**链映射**。

命题　设 $\varphi=\{\varphi_p: C_p(K)\to C_p(L)\}$ 与 $\psi=\{\psi_p: C_p(L)\to C_p(M)\}$ 都是链映射，则

(i)　$\psi\varphi=\{\psi_p\varphi_p: C_p(K)\to C_p(M)\}$ 是链映射，而且
$(\psi\varphi)_{*p}=\psi_{*p}\varphi_{*p}: H_p(K)\to H_p(M)$；

(ii)　当 $K=L$，则恒同链映射 $1=\{1_{C_p(K)}: C_p(K)\to C_p(K)\}$，导出恒同同构 $1_*=\{1_{H_p(K)}: H_p(K)\to H_p(K)\}$。

证明　(i) 对任意的 $c\in C_p(K)$，$\varphi_p(c)\in C_p(L)$。由于 φ 与 ψ 都是链映射，$\partial\psi_p\varphi_p(c)=\psi_{p-1}\partial\varphi_p(c)=\psi_{p-1}\varphi_{p-1}\partial c$，所以 $\psi\varphi$ 是链映射。

对任意的 $[z]\in H_p(K)$，$(\psi\varphi)_{p*}([z])=[\psi_p\varphi_p(z)]=\psi_{p*}[\varphi_p(z)]=\psi_{p*}\varphi_{p*}([z])$。

(ii) 对任意的 $[z]\in H_p(K)$，$1_{p*}([z])=[1_{C_p(K)}(z)]=[z]$。 ∎

定理　从复形 K 到复形 L 的链映射 $\{\varphi_p\}$，对每个维数 p 诱导出同调群的同态：

$$\varphi_{p*}: H_p(K)\to H_p(L).$$

证明　先证明 φ_p 把 $Z_p(K)$ 映入 $Z_p(L)$：对 $p=0$，由于 $Z_0(K)=C_0(K)$ 且 $Z_0(L)=C_0(L)$，定义中条件(1)当然成立。

对 $p \geq 1$，设 $z_p \in Z_p(K)$，则 $\partial\varphi_p(z_p) = \varphi_{p-1}\partial(z_p) = \varphi_{p-1}(0) = 0$，所以 $\varphi_p(z_p)$ 是 L 中的闭链. 如果 $b_p = \partial(c_{p+1}) \in B_p(K)$，则

$$\varphi_p(b_p) = \varphi_p\partial(c_{p+1}) = \partial\varphi_{p+1}(c_{p+1}) \in B_p(L).$$

由于 $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$，$H_p(L) = Z_p(L)/B_p(L)$，因此 φ_p 诱导出 $\varphi_{p*}: H_p(K) \to H_p(L)$ 由 $\varphi_{p*}(z_p + B_p(K)) = \varphi_p(z_p) + B_p(L)$ 所定义，即

$$\varphi_{p*}([z_p]) = [\varphi_p(z_p)] \quad \blacksquare$$

定义 从复形 K 到复形 L 的单纯映射是一个从 K 的顶点到 L 的顶点的函数使得当 $\sigma^p(a_0 \cdots a_p)$ 是 K 的一个单形，则诸顶点 $\varphi(a_i)(0 \leq i \leq p)$ 不一定都不相同，但都是 L 的某个单形诸顶点. 当诸 $\varphi(a_i)$ 都相异，则 p 维单形 $(\varphi(a_0) \cdots \varphi(a_p))$ 称为 σ^p 的像，并记为 $\varphi(\sigma^p)$. 当某个 $i \neq j$，而 $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$，则称 φ 将 σ^p **瓦解**.

当 φ 是从 K 到 L 的单纯映射，$p \geq 0$. 设 $g\sigma^p$ 是 K 上基本 p 维链，定义

$$\varphi_p(g\sigma^p) = \begin{cases} g\varphi(\sigma^p), & \text{当 } \varphi \text{ 不瓦解 } \sigma^p \\ 0, & \text{当 } \varphi \text{ 瓦解 } \sigma^p \end{cases}$$

将函数 φ_p 线性地扩充为一个同态 $\varphi_p: C_p(K) \to C_p(L)$，即当 $\sum g_i\sigma_i^p$ 是 K 上 p 维链，则

$$\varphi_p(\sum_i g_i\sigma_i^p) = \sum \varphi_p(g_i\sigma_i^p),$$

该同态序列 $\{\varphi_p\}$ 称为**由 φ 诱导的链的映射**.

定理 设 $\varphi: K \to L$ 是一个单纯映射，则上面定义的同态序列 $\{\varphi_p\}$ 实际上是一个链映射.

证明 由于每个 φ_p 是同态，因此只须对基本 p 维链 $g\sigma^p$，$p \geq 1$，证明 $\partial\varphi_p(g\sigma^p) = \varphi_{p-1}\partial(g\sigma^p)$ 即可. 对 K 上一个基本 p 维链 $g\sigma^p$，此中 $+\sigma^p = (a_0 \cdots a_p)$，当 φ 不瓦解 σ_p，则 $\varphi_p(\sigma^p) = (\varphi(a_0) \cdots$

$\varphi(a_p))$,记 σ^p 的$(p-1)$维面为 σ_i^{p-1},而 $\varphi_p(\sigma^p)$的$(p-1)$维面为 $\varphi(\sigma^p)_i$,则

$$\partial\varphi_p(g\sigma^p)=\partial(g\varphi_p(\sigma^p))=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i g\varphi_p(\sigma^p)_i$$

$$=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i g\varphi_p(\sigma_i^{p-1})=\varphi_{p-1}\Big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i g\sigma_i^{p-1}\Big)=\varphi_{p-1}\partial(g\sigma^p)$$

而当 φ_p 瓦解 σ^p,不妨假定 $\varphi(a_0)=\varphi(a_1)$,则 $\varphi_p(g\sigma^p)=0$,所以 $\partial\varphi_p(g\sigma^p)=0$,因而

$$\varphi_{p-1}\partial(g\sigma^p)=\varphi_{p-1}\Big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i g\sigma_i^{p-1}\Big)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i$$

$\varphi_{p-1}(g\sigma_i^{p-1})$ 对 $i\geqslant 2$, σ_i^{p-1} 都含有 a_0 与 a_1,由于 $\varphi_p(a_0)=\varphi_p(a_1)$,于是 φ_p 将 $\sigma_i^{p-1}(i\geqslant 2)$瓦解,剩下的只有开头两项,即

$\varphi_{p-1}\partial(g\sigma_p)=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\varphi_{p-1}(g\sigma_i^{p-1})=\varphi_{p-1}(g\sigma_0^{p-1})-\varphi_{p-1}(g\sigma_1^{p-1})$,而 $\sigma_0^{p-1}=(a_1,a_2,\cdots,a_p)$, $\sigma_1^{p-1}=(a_0,a_2,\cdots,a_p)$,由于 $\varphi(a_0)=\varphi(a_1)$,故上式右边两项消去,因此 $\varphi_{p-1}\partial(g\sigma^p)=0$ 与$\partial\varphi_p(g\sigma^p)=0$ 一致,故等式(1)成立 ▌

注　在§3已证明过对同一复形的不同定向,相应的同调群是同构的,因此这个定理的证明中与各单形 σ 的定向无关

定理　设单纯映射 $\varphi: K\to L$ 的诱导同态

$$\varphi_*=\{\varphi_{*p}: H_p(K)\to H_p(L)\},$$

(i)　如果 $\psi: L\to M$ 也是单纯映射,则$(\psi\varphi)_{*p}=\psi_{*p}\varphi_{*p}$,

(ii)　当 $K=L$,则$(1_K)_{*p}=1_{H_p(K)}: H_p(K)\to H_p(K)$

证明　(i)　由 φ_p,ψ_p 和$(\psi\varphi)_p$ 的定义,则有$(\psi\varphi)_p=\psi_p\varphi_p$ 因此对任一$[z]\in H_p(K)$,$(\psi\varphi)_{*p}([z])=[\psi_p\varphi_p(z)]=\psi_{*p}\varphi_{*p}([z])$

(ii)显然 ▌

定义　设 $|K|$ 与 $|L|$ 是和复形 K 与 L 相应的多面体,而 φ 是

从K到L的顶点间的单纯映射，则φ可以扩充为一个函数，仍记为φ: $|K| \to |L|$，定义为：设$x \in |K|$，在K中有个单形$\sigma^p = (a_0 \cdots a_p)$使得$x \in \sigma^p$，则$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i$，此中诸$\lambda_i$称为$x$的重心坐标，定义$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \varphi(a_i)$，则称该函数$\varphi: |K| \to |L|$是从$|K|$到$|L|$的单纯映射。

注　不难验证单纯映射$\varphi: |K| \to |L|$是连续的，它是复形K与L间的单纯映射$\varphi: K \to L$所诱导的。

例　设K是一个3维单形的2维骨架，而L是2维单形的闭包复形，它们具定向如(图3-23)所示。

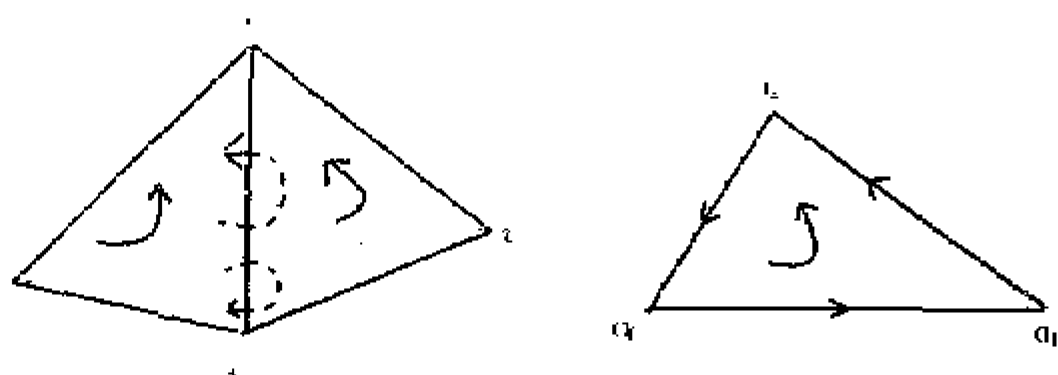


图3-23

设从K到L的单纯映射对诸顶点的对应定义为$\varphi(v_0) = \varphi(v_3) = a_0$，$\varphi(v_1) = a_1$，$\varphi(v_2) = a_2$。该映射扩充为$\varphi: |K| \to |L|$的单纯映射：$(v_0v_1)$、$(v_1v_2)$和$(v_2v_0)$分别线性地映到$(a_0a_1)$、$(a_1a_2)$和$(a_2a_0)$；$(v_1v_3)$和$(v_2v_3)$分别线性地映到$(a_1a_0)$和$(a_2a_0)$上去，而$(v_0v_3)$瓦解为顶点$(a_0)$；$(v_0v_1v_2)$和$(v_3v_0v_1)$分别瓦解为$(a_0a_2)$和$(a_0a_1)$，而$(v_0v_1v_2)$和$(v_3v_1v_2)$均线性地映到$(a_0a_1a_2)$上去。因此链群上的诱导同态如下：

$$\varphi_0(g_0(v_0) + g_1(v_1) + g_2(v_2) + g_3(v_3)) = (g_0 + g_3)(a_0) +$$

$g_1(a_1)+g_2(a_2)$;

$\varphi_1(h_1(v_0v_1)+h_2(v_1v_2)+h_3(v_0v_2)+h_4(v_1v_3)+h_5(v_0v_3)+h_6(v_2v_3))=(h_1-h_4)(a_0a_1)+h_2(a_1a_2)+(h_6-h_3)(a_2a_0)$;

$\varphi_2(k_1(v_0v_1v_2)+k_2(v_1v_2v_3)+k_3(v_0v_1v_3)+k_4(v_0v_3v_2))=(k_1+k_2)(a_0a_1a_2)$

命题　设 $f: |K| \to |L|$ 和 $g: |L| \to |M|$ 都是单纯映射，则 $g\circ f: |K| \to |M|$ 也是单纯映射.

证明　读者自加验证 ∎

另一方面，对于给定的连续映射 $f: |K| \to |L|$，是否存在上述的单纯映射的问题，我们在下面逐步介绍，回答是肯定的.

定义　对 p 维单形 $\sigma=(a_0\cdots a_p)$，则所有的重心坐标均为正数的点集 $\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid x=\sum_{i=0}^{p}\lambda_i a_i,\ \lambda_i>0,\ \sum_{i=0}^{p}\lambda_i=1\}$ 称为以 $a_0,\cdots,a_p$ 为顶点的**开单形**，记为 $\mathring{\sigma}$；复形 K 中以一个顶点 a 作为顶点的开单形的并集 $\bigcup_{a\in\sigma\in K}\mathring{\sigma}$，称为以 a 为顶点的**开星形**，记为 $\mathrm{ost}(a)$.

特别对零维单形 a，则 $\mathring{a}=\{a\}$.（图 3－24）显示 K 中 $\mathrm{ost}(a)$ 的图形，图中∘号表示该点不在图形之中. 设 $\sigma^1=(a_0a_1)$，则 $\mathring{\sigma}^1$ 是从 a_0 到 a_1 的开线段，不包含端点 a_0 与 a_1.

注　复形 K 的一个顶点的星形是 K 中含该顶点的诸单形的集合；而一顶点的开星形则是多面体 $|K|$ 的某些点集的并集. 对于复形 K，则 $|K|=\bigcup_{\sigma\in K}\mathring{\sigma}$；当 $\sigma_1,\sigma_2\in K$，则 $\mathring{\sigma}_1\cap\mathring{\sigma}_2=\begin{cases}\varnothing, & \sigma_1\neq\sigma_2\\ \mathring{\sigma}_1, & \sigma_1=\sigma_2\end{cases}$，对 $\sigma\in K$，显然 $\mathring{\sigma}$ 不一定是 $|K|$ 的开子集，然而 K 的任一开星形 $\mathrm{ost}(a)$ 是 $|K|$ 的开子集，而且 $\{\mathrm{ost}(a) \mid a\in K^0\}$ 是 $|K|$ 的开覆盖.

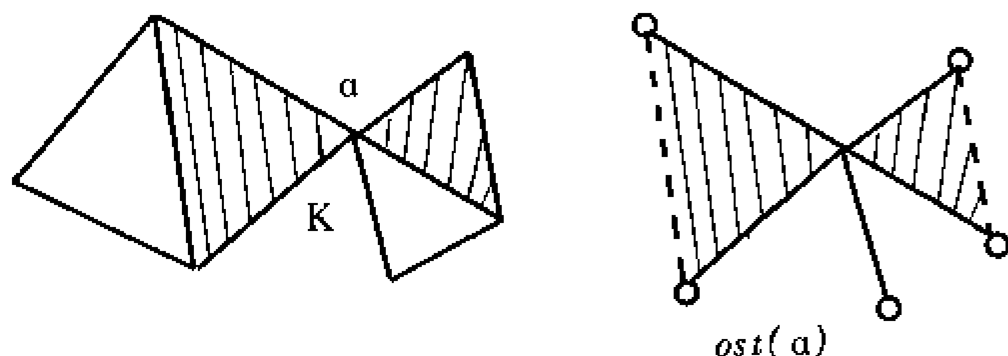


图 3 24

引理 设 $a_0,\cdots,a_p$ 是复形 K 的顶点，则 $\{a_0,\cdots,a_p\}$ 是 K 的某个单形的诸顶点的集合，其充要条件是 $\bigcap_{i=0}^{p}\mathrm{ost}\ a_i\neq\emptyset$

证明 设 $\{a_0,\cdots,a_p\}$ 是 K 中某单形 σ 的诸顶点的集合，则 $\mathring{\sigma}\subset\mathrm{ost}\ a_i\ (i=0,\cdots,p)$. 因此 $\bigcap_{i=0}^{p}\mathrm{ost}\ a_i\supset\mathring{\sigma}\neq\emptyset$.

反之，设 $x\in\bigcap_{i=0}^{p}\mathrm{ost}\ a_i\neq\emptyset$ 则 $x\in|K|=\bigcup_{\sigma\in K}\mathring{\sigma}$，因此必存在一个单形 $\sigma\in K$ 使 $x\in\mathring{\sigma}$ 由 ost a_i 的定义，a_i 是 σ 的顶点($i=0,\cdots,p$)，因此 $\{a_0,\cdots,a_p\}$ 是 $\sigma\in K$ 诸顶点的集合. ▌

定义 设 $f:|K|\to|L|$ 是连续映射，$g:K\to L$ 是单纯映射，如果对任一点 $x\in|K|$，$f(x)\in\mathring{\tau}$，$\tau\in L$；则有 $g(x)\in\tau$，我们称 g 是 f 的**单纯追近**.

例 如(图 3－25)所示，连续映射 $f:|K|\to|L|$. 设 $p_i=f(a_i)$，而 $g_1,g_2:K\to L$ 分别把 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 映为 b_1,b_1,b_1,b_2,b_2,b_2 和 b_1,b_1,b_1,b_3,b_2,b_2，则 g_1 与 g_2 都是 f 的单纯追近

命题 设 $f:|K|\to|L|$ 是连续映射，$g:K\to L$ 是 f 的单纯追近，则 $f\simeq g:|K|\to|L|$ 如果 f 是单纯映射，则 $f=g$

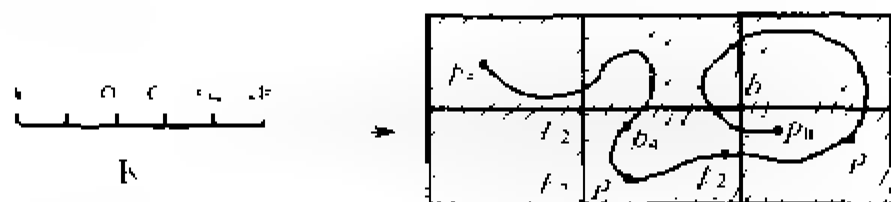


图 3-25

证明　当 g 是 f 的单纯逼近，则对任一点 $x\in|K|$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 L 的同一单形之中. 因为单形是凸集，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的连接线段也落在该单形之中，于是存在同伦 $H:|K|\times I\to|L|$ 由 $H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$，$x\in|K|$，$t\in I$ 所决定. 这表明 $f\simeq g$. 特当 f 是单纯映射，则对任意 $a\in K^0$，$f(a)=b\in L^0$，而 g 是单纯逼近，$g(a)\in L^0$，所以 $g(a)=f(a)=b$. 因为单纯映射由顶点的对应完全决定，所以 f 与 g 一致. ▌

至于连续映射是否存在单纯逼近，我们在给出下面的概念之后将介绍其存在性定理.

定义　设 $f:|K|\to|L|$ 是连续映射，如果对每个 $a\in K^0$，至少存在一个 $b\in L^0$，使得 $f(\text{ost}\,a)\subset\text{ost}\,b$，则称 f 具有**星形关系**.

定理　连续映射 $f:|K|\to|L|$ 有它的单纯逼近的充要条件是 f 具有星形关系. 或即单纯映射 $g:K\to L$ 是连续映射 f 的单纯逼近，其充要条件是对任意的 $a\in K^0$，$f(\text{ost}\,a)\subset\text{ost}(g(a))$.

证明　设 $g:K\to L$ 是 f 的单纯逼近，对任意的点 $x\in\text{ost}\,a$，此中 a 是 K^0 的一点. 由定义，存在着 K 中以 a 为顶点的开单形 $\mathring{\sigma}$ 包含 x，并存在 $\tau\in L$ 使 $f(x)\in\mathring{\tau}$，$g(x)\in\tau$. 由于 g 将 σ 映为 L 的单形 $\tau'=g(\sigma)$，τ' 以 $g(a)$ 为它的一个顶点而且 $g(x)\in\mathring{\tau}'$. 因为 $g(x)\in\tau$，所以 τ' 是 τ 的面，因此 $g(a)$ 也是 τ 的顶点. 所以

$f(x)\in\dot{\tau}\subset\text{ost}(g(a))$，证明了 $f(\text{ost }a)\subset\text{ost}(g(a))$

反之，设 f 具星形关系，我们定义 $g^\circ: K^\circ\to L^\circ$ 为：对任意的 $a\in K^\circ$，$g^\circ(a)$ 是满足关系式 $f(\text{ost }a)\subset\text{ost}(g^\circ(a))$（当 $g^\circ(a)$ 不止一个时，可任取一个）不难看出，这样的 g° 决定一个单纯映射 $g: K\to L$. 事实上，设 $(a_0\cdots a_p)\in K$，$\bigcap\limits_{i=0}^{p}\text{ost }a_i\neq\emptyset$，所以 $\emptyset\neq f(\bigcap\limits_{i=0}^{p}\text{ost }a_i)\subset\bigcap\limits_{i=0}^{p}f(\text{ost }a_i)\subset\bigcap\limits_{i=0}^{p}\text{ost }g^\circ(a_i)$. 因此 $\{g^\circ(a_0),\cdots,g^\circ(a_p)\}$ 是 L 中某个单形的顶点集合. 亦即 g° 将 K 的单形映到 L 的单形去. 它决定了一个单纯映射 g. 剩下的是还要验证这样的 g 是 f 的单纯逼近. 设 $x\in\dot{\sigma}$，$\sigma=(a_0\cdots a_p)\in K$. 则 $x\in\text{ost }(a_i)$，$f(x)\in f(\text{ost }a_i)\subset\text{ost}g(a_i)$. 设 $f(x)\in\dot{\tau}$，$\tau\in L$. 由 ost $g(a_i)$ 的定义，诸 $g(a_i)$ 都是 τ 的顶点，从 g 是单纯映射，它将 σ 映为 L 中以 $g(a_i)$ 为顶点的单形 $\tau'=g(\sigma)$. 因此 τ' 是 τ 的面，$g(x)\in g(\sigma)\subset\tau$，所以 g 是 f 的单纯逼近. ▌

命题 设连续映射 $f_1:|K|\to|L|$，$f_2:|L|\to|M|$ 分别具单纯逼近 $g_1:K\to L$，$g_2:L\to M$，则 $f_2\circ f_1:|K|\to|M|$ 具单纯逼近 $g_2\circ g_1:K\to M$.

证明 读者自行验证. ▌

注 对于同一连续映射 f，可有不同的单纯逼近，但它们所诱导的同调群的同态是相同的，将留到 §7 加以补充说明.

从上面定理得知，连续映射 $f:|K|\to|L|$ 具单纯逼近必须满足一定条件. 关键在于 $|K|$ 中开星形在 f 之下的像必须包含在 $|L|$ 中的某个开星形之中，而这个条件只须 K 中的单形充分小即可达到. 我们在下面介绍将 K 的诸单形加以细分，得出细分后的复形将满足单纯逼近的条件

定义 设 $\sigma^p=(a_0\cdots a_p)$ 是复形 K 的一个 p 维单形，则所有

的重心坐标均相等的点 $\dot{\sigma}_p = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} a_i$，称为 σ^p 的**重心**.

复形 K 的**重心重分**是以下述方式决定的复形，记为 $\mathrm{Sd}\,K$：

(i) $(\mathrm{Sd}\,K)^0 = \{\dot{\sigma} \mid \sigma \in K\}$；

(ii) 设 σ_i $(i=0,1,\cdots,p)$ 都不相同，而且 σ_{i-1} 是 σ_i 的面，则 $(\dot{\sigma}_0\cdots\dot{\sigma}_p) \in \mathrm{Sd}\,K$.

复形 K 的第 m 次重心重分 $\mathrm{Sd}^m K$ 定义为 $\mathrm{Sd}^{m-1}K$ 的重心重分，即 $\mathrm{Sd}^m K = \mathrm{Sd}(\mathrm{Sd}^{m-1}K)$. $\mathrm{Sd}\,K$ 也记为 $K^{(1)}$，$(\mathrm{Sd}^m K)$ 记为 $K^{(m)}$.

从定义即知 0 维单形 (a) 的重心就是 $\{a\}$ 本身；1 维单形 (a_0a_1) 的重心是线段 a_0a_1 的中点；2 维单形 $(a_0a_1a_2)$ 的重心是三角形 $a_0a_1a_2$ 的重心，即该三角形各边上三条中线的交点（图 3-26）表示复形 K 及其一次重心重分 $\mathrm{Sd}\,K$.

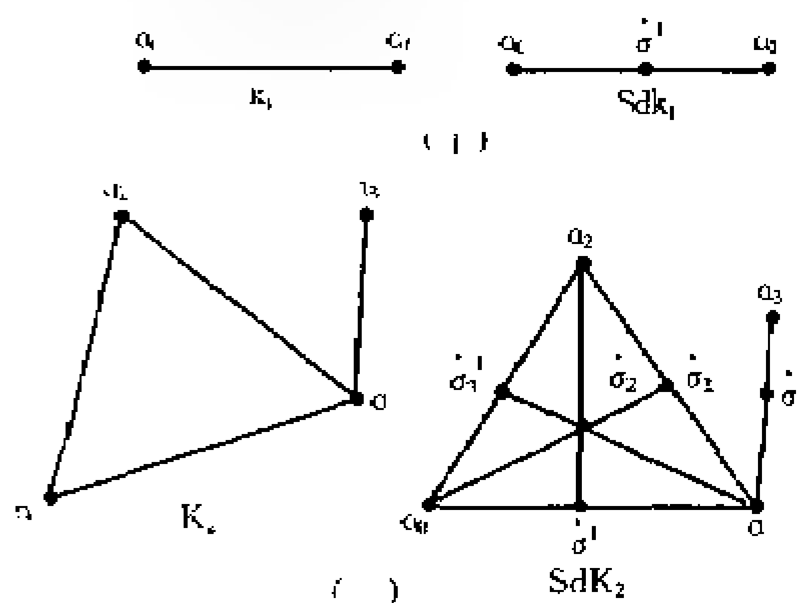


图 3-26

K_1: $a_0, a_1, (a_0a_1)$

Sd $K_1 = a_0, a_1, \sigma^1, (a_0\sigma^1), (\sigma^1 a_1)$

K_2: $a_0, a_1, a_2, a_3; (a_0a_1), (a_1a_2), (a_2a_0), (a_1a_3); (a_0a_1a_2)$

Sd K_2: $a_0, a_1, a_2, a_3; (a_0\sigma_1^1), (\sigma_1^1 a_1), (a_1\sigma_2^1), (\sigma_2^1 a_2), (a_2\sigma_3^1), (\sigma_3^1 a_0), (a_1\sigma_4^1), (\sigma_4^1 a_3); (a_0\sigma_1^1\sigma^2), (\sigma_1^1 a_1\sigma^2), (a_1\sigma_2^1\sigma^2), (\sigma_2^1 a_2\sigma^2), (a_2\sigma_3^1\sigma^2), (\sigma_3^1 a_0\sigma^2)$

不难验证，定义中的 Sd K 也是一个复形，而且 $|\text{Sd } K| = |K|$，$\dim \text{Sd } K = \dim K$

定义 复形 K 的诸单形的最大直径称为 K 的**网格**，记为 mesh K. 即 mesh $K = \max\limits_{\sigma\in K}\{\text{diam } \sigma\}$，此中 σ 的直径 $\text{diam}(\sigma) = \sup\limits_{x,y\in\sigma}\{\|x-y\|\}$.

从定义即知对 $a \in K^0$，ost a 必落在以 a 为中心，以 mesh K 为半径的球体中. 而且，重心重分次数越高，网格越小.

命题 设 K 是复形，则 $\lim\limits_{s\to\infty} \text{mesh } K^{(s)} = 0$.

证明 设 $x, y \in \mathbf{R}^n$，x 与 y 间的距离记为 $\|x-y\|$，当 x 与 y 是 p 维单形 σ 中的点；令 $y = \sum\limits_{i=0}^{p}\lambda_i a_i$，$\|x-y\| = \|\sum\limits_{i=0}^{p}\lambda_i(x-a_i)\| \leq \sum\limits_{i=0}^{p}\lambda_i\|x-a_i\| \leq \max\{\|x-a_i\|\}$ ($\sum\lambda_i = 1$) 因此 σ 的直径 $\text{diam } \sigma = \sup\limits_{x,y\in\sigma}\{\|x-y\|\} = \max\limits_{i,j}\|a_i - a_j\|$.

现在考虑 K 的第 1 次重心重分 $K^{(1)}$，设 $(\dot\sigma\,\dot\tau)$ 是它的一个 1 维单形，此中 $\dot\sigma, \dot\tau$ 分别是单形 σ 与 τ 的重心，依据该 1 维单形的顶点的顺序，σ 是 τ 的面. 设 $\dot\tau = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}a_i$，其中 $a_0, \cdots, a_p$ 是 τ 的诸

顶点. 因此必有 τ 的一个顶点 v 使 $\|t-\sigma\| \leqslant \|t-v\|$. 于是

$$\|t-\sigma\| \leqslant \|t-v\| = \left\|\left(\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} a_i\right)-v\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}(a_i-v)\right\|$$

$\leqslant \frac{p}{p+1}\mathrm{mesh}\, K$. 设 K 的维数是 n, 则 $p \leqslant n$, 因此

$$\|t-\sigma\| \leqslant \frac{n}{n+1}\mathrm{mesh}\, K.$$

因为 $K^{(1)}$ 的网格是 $K^{(1)}$ 中所有的 1 维单形 $(\sigma\, t)$ 的边长的最大值, 所以 $\mathrm{mesh}\, K^{(1)} \leqslant \frac{n}{n+1}\mathrm{mesh}\, K$. 从 $K^{(s)}$ 的归纳定义即有 $\mathrm{mesh}\, K^{(s)} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \mathrm{mesh}\, K$, 注意到 $\lim\limits_{s\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s = 0$, 从此得出 $\lim\limits_{s\to\infty}\mathrm{mesh}\, K^{(s)} = 0$.

定理 (单纯逼近定理)设 $|K|$ 与 $|L|$ 分别是具三角剖分 K 与 L 的多面体, $f: |K| \to |L|$ 是一个连续映射, 则存在 K 的重心重分 $K^{(s)}$ 和 $f: |K^{(s)}| \to |L|$ 的单纯逼近 $g: K^{(s)} \to L$.

证明 由于 $\{\mathrm{ost}\, b \mid b \in L^0\}$ 是 $|L|$ 的开覆盖, 因为 f 连续, 所以 $\{f^{-1}(\mathrm{ost}\, b) \mid b \in L^0\}$ 是 $|K|$ 的开覆盖. 然而 $|K|$ 是紧致度量空间, 由 Lebesgue 引理, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $x \in |K|$, 存在 $b \in L^0$ 使得以 x 为中心, δ 为半径的球体 $B(x, \delta) \subset f^{-1}(\mathrm{ost}\, b)$. 而由上面的命题, 存在非负整数 s 使得 K 的 s 次重心重分 $K^{(s)}$ 满足 $\mathrm{mesh}\, K^{(s)} = \lambda < \delta$. 从此, 对 $K^{(s)}$ 的任意顶点 a, 存在 L 的顶点 b, 使得 a 在 $K^{(s)}$ 中的开星形 $\mathrm{ost}\, a \subset B(a, \lambda) \subset B(a, \delta) \subset f^{-1}(\mathrm{ost}\, b)$, 或即 $f(\mathrm{ost}\, a) \subset \mathrm{ost}\, b$. 表明 $f: |K^{(s)}| \to |L|$ 具星形性质, 依据单纯逼近的存在性定理, f 具单纯逼近 $g: K^{(s)} \to L$. ▌

我们将指出 $f: |K| \to |L|$ 诱导的 $K \to L$ 的同调群的同态与 K 经过 s 次重分后的 $K^{(s)}$ 的单纯逼近 $g: |K^{(s)}| \to |L|$ 诱导出 $K^{(s)} \to L$ 的同调群的同态是相同的. 为此, 先引进下面概念:

定义 设同态序列 $Sd=\{Sd_p: C_p(K)\to C_p(K^{(1)})\}$ 由下列方式所确定：

(i) 当 $p<0$ 或 $p>\dim K$，则 $Sd_p=0$；

(ii) 对任意的 $a\in K^0$，则 $Sd_0(a)=a$，再通过线性扩充为同态 $Sd_0: C_0(K)\to C_0(K^{(1)})$；

(iii) 对 $0<p\leqslant\dim K$，假设 $Sd_{p-1}: C_{p-1}(K)\to C_{p-1}(K^{(1)})$ 已经定义，则对任意的 $\sigma^p\in K$，令 $Sd_p\sigma^p=\hat{\sigma}^p Sd_{p-1}\partial\sigma^p$，式中 $\hat{\sigma}^p Sd_{p-1}\partial\sigma^p$ 是以 $\hat{\sigma}^p$ 为顶点的链 $Sd_{p-1}\partial\sigma^p$ 上的锥形．再作线性扩充为同态：$Sd_p: C_p(K)\to C_p(K^{(1)})$．

这样的同态序列 Sd 称为**链重分映射**．

归纳地定义 $Sd^m=\{Sd_p^m: C_p(K)\to C_p(K^{(m)})\}$，此中 $Sd_p^m=Sd_p\circ Sd_p^{m-1}$；称为 m 次**链重分映射**．

命题 上述定义中的同态序列 $Sd=\{Sd_p: C_p(K)\to C_p(K^{(1)})\}$ 是链映射．

证明 当 $p\leqslant 0$ 或 $p>\dim K$，$\partial_p Sd_p\sigma^p=Sd_{p-1}\partial_p\sigma^p$ 显然成立．当 $0<p\leqslant\dim K$，对任意的 $\sigma^p\in K$，归纳地假设对 $p-1$ 时已经成立，即 Sd_{p-1} 是链映射，于是根据锥形的边缘运算公式和 Sd_{p-1} 是链映射的归纳假设，则

$$\begin{aligned}\partial_p Sd_p\sigma^p&=\partial_p(\hat{\sigma}^p Sd_{p-1}\partial_p\sigma^p)=Sd_{p-1}\partial_p\sigma^p-\hat{\sigma}^p\partial_{p-1}Sd_{p-1}\partial_p\sigma^p\\&=Sd_{p-1}\partial_p\sigma^p-\hat{\sigma}^p Sd_{p-2}\partial_{p-1}\partial_p\sigma^p=Sd_{p-1}\partial_p\sigma^p\end{aligned}$$ ▌

设 $f:|K|\to|L|$ 是任意的连续映射，$g: K^{(m)}\to L$ 是 f 单纯逼近，由于 Sd 以及单纯映射都是链映射，则有下面的诱导同态交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_p(K) & \xrightarrow{\quad f_{*p}\quad} & H_p(L) \\ & {\scriptstyle Sd^m_{*p}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle g_{*p}} & \\ & H_p(K^{(m)}) & \end{array}$$

注　在本章最后的§7将补充证明上图中的复合同态 $g_{*p}Sd^m_{*p}:H_p(K)\to H_p(L)$与重分的次数 m 和单纯逼近 g 的选择无关，而是由 f 唯一确定的. 因此令 $f_{*p}=g_{*p}\cdot Sd^m_{*p}$，并称同态序列 $f_*=\{f_{*p}:H_p(K)\to H_p(L)\}$ 是连续映射 f 的诱导同态.

定理　设 $f:|K|\to|L|$，$g:|L|\to|M|$，则(i)复合映射 gf 的诱导同态$(gf)_*$是诱导同态的复合 $g_{*p}f_{*p}:H_p(K)\to H_p(M)$；(ii)恒同映射 $1_{|K|}:|K|\to|K|$的诱导同态是恒同同构，即$(1_{|K|})_{*p}=1_{H_p(K)}:H_p(K)\to H_p(K)$；(iii)当 $f\simeq g:|K|\to|L|$，则 $f_{*p}=g_{*p}:H_p(K)\to H_p(L)$，即同伦的映射诱导出相同的同态.

证明　留到§7给出证明. ▍

定理　设 $f:|K|\to|L|$同伦等价，则对一切整数 p，诱导同态 $f_{*p}:H_p(K)\to H_p(L)$是同构.

证明　设 f 是同伦等价，则有 f 的同伦逆 $g:|L|\to|K|$满足 $gf\simeq 1_{|K|}$，$fg\simeq 1_{|L|}$.

由上面的定理即有

$$g_{*p}f_{*p}=(gf)_{*p}=1_{H_p(K)}:H_p(K)\to H_p(K),$$

$$f_{*p}g_{*p}=(fg)_{*p}=1_{H_p(L)}:H_p(L)\to H_p(L).$$

因此 f_{*p}是同构. ▍

推论　同调群是伦型不变量，当然也是拓扑不变量. ▍

例1 平环 A 与 Möbius 带 M 都与圆周 S^1 具相同的伦型，因此

$$H_p(A)\simeq H_p(M)\simeq H_p(S^1)\cong\begin{cases}\mathbf{Z}, & p=0,1;\\0, & p\neq 0,1\end{cases}.$$

例2 对于任一可剖分空间上的锥形 C，它与单点空间 P 具相同伦型，因此

$$H_p(C)\cong H_p(P)\cong\begin{cases}\mathbf{Z}, & p=0;\\0, & p\neq 0\end{cases}$$

§6 应 用

定理 当 $m\neq n$，则(i) S^m 与 S^n 不同胚；(ii) $\boldsymbol{R}^m$ 与 $\boldsymbol{R}^n$ 不同胚.

证明 (i)利用反证法. 假设有一个从 S^m 到 S^n 的同胚 h 及其同胚逆 h^{-1}，则 $h^{-1}h$ 与 hh^{-1} 分别是 S^m 和 S^n 到自身的恒同映射. 注意到恒同映射诱导出相应的三角剖分的各维同调群之间是同构的. 从 $(hh^{-1})_{*p}=h_{*p}h^{-1}_{*p}:H_p(S^n)\to H_p(S^n)$

$$(h^{-1}h)_{*p}=h^{-1}_{*p}h_{*p}:H_p(S^m)\to H_p(S^m)$$

都是恒同同构，因此 h_{*p} 是 $H_p(S^m)$ 与 $H_p(S^n)$ 的同构. 根据§2例8的结果，这是不可能的. 因此 S^m 与 S^n 不同胚.

(ii)由点集拓扑的概念，S^n 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的单点紧致化. 假如 $\boldsymbol{R}^m$ 与 $\boldsymbol{R}^n(m\neq n)$同胚，则它们的单点紧致化也必定同胚，根据(i)即知是不可能的. 因此 $\boldsymbol{R}^m$ 与 $\boldsymbol{R}^n$ 不同胚. ∎

从直观上看到，圆周 S^1 到自身的连续映射 $f:S^1\to S^1$，当点 x 在 S^1 沿逆时针方向在 S^1 上绕一圈，则 $f(x)$ 在 S^1 上的逆时针

或顺时针方向绕若干圈．这一结果导出下面的概念：

定义　设 $f: S^n \to S^n (n \geq 1)$ 是连续映射，K 是 S^n 的一个三角剖分，φ 是与该剖分相应的从多面体 $|K|$ 到 S^n 的单纯映射，我们有下面的交换图：

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} \\ |K| & \xrightarrow{\tilde f} & |K| \end{array}$$

其中 $\tilde f = \varphi^{-1} f \varphi: |K| \to |K|$．

当以同调类 $[z_n]$ 表示 $H_n(K)$ 的基本类（§2 指出 $z_n = \sum_{\sigma^n \in K} 1\cdot\sigma^n$），则存在整数 ρ 使得 $\tilde f_{*n}([z_n]) = \rho[z_n]$，这个整数 ρ 称为 f 的**映射度**或**拓扑度**，或简称为**度**；记为 $\deg(f)$．

定理　设 $f, g: S^n \to S^n$ 都是连续映射，则

(i)　$\deg(gf) = \deg(f)\cdot\deg(g)$；

(ii)　$\deg(1_{S^n}) = 1$，此中 1_{S^n} 是 S^n 到自身的恒同映射；

(iii)　设 $h: S^n \to S^n$ 是同胚，则 $\deg(h) = \pm 1$；

(iv)　设 c 是常值映射，则 $\deg(c) = 0$；

(v)　设 $f \simeq g: S^n \to S^n$，则 $\deg(f) = \deg(g)$．

证明　(i)　设 K 是 S^n 的一个三角剖分，其基本同调类 $[z_n]$，于是诱导同态

$\tilde f_{*n}: H_n(K) \to H_n(K)$，$\tilde g_{*n}: H_n(K) \to H_n(K)$

$(\tilde g \tilde f)_{*n}([z_n]) = \deg(gf)[z_n]$

而 $\tilde g_{*n}\tilde f_{*n}([z_n]) = \tilde g_{*n}(\deg(f)[z_n]) = \deg(g)\deg(f)([z_n])$，根据 $(\tilde g \tilde f)_{*n} = \tilde g_{*n}\tilde f_{*n}$，因此 $\deg(gf) = \deg(g)\deg(f)$

(ii)　对恒同映射 1_{S^n}，从定义 $1_{S^n*}([z_n]) = 1[z_n]$，所以 $\deg(1_{S^n}) = 1$

(iii) 设 h 为同胚，则有同胚逆 h^{-1}，而 $1=\deg(1_{S^n})=\deg(hh^{-1})=\deg(h)\deg(h^{-1})$，由于 $\deg(h)$ 必为整数，所以 $\deg(h)=\pm 1$，而且 $\deg(h)=\deg(h^{-1})$.

(iv) 对常值映射 c，$c_*(z_n)=0$，所以 $\deg(c)=0$.

(v) 设 $f\sim g$，令 $H: S^n\times I\to S^n$ 为它们之间的同伦，即 $H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，$X\in S^n$.

设 ε 是 $|K|$ 的开覆盖 $\{\mathrm{ost}(v)\}$，v 是 K 的顶点，的 Lebesgue 数．这时由于 H 是一致连续的，所以有一个正数 δ 使得当 S^n 与 I 的子集 A 与 B 满足条件 $\mathrm{diam}(A)<\delta$ 且 $\mathrm{diam}(B)<\delta$，则 $\mathrm{diam}(H(A\times B))<\varepsilon$．现在假设 K 的重心重分 $K^{(m)}$ 具网格 $\mathrm{mesh}(K^{(m)})<\delta/2$，则对 $K^{(m)}$ 的顶点 w，$\mathrm{diam}(\mathrm{ost}(w))<\delta$．设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_p=1$ 是 I 的分割使相邻两点之差小于 δ，于是对 $K^{(m)}$ 的顶点 w 和 I 的相邻分割点 t_{j-1} 和 t_j，集合 $H(\mathrm{ost}(w)\times[t_{j-1},t_j])$ 的直径小于 ε，因此它落在某个顶点 v_a 的开星形 $\mathrm{ost}(v_a)$ 之中.

因此，当 $t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j$，根据单纯逼近定理，由 $\varphi_t(w)=v_a$ 所定义的单纯映射 φ_t 是 H_t 的单纯逼近．从此得出对 $t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j$，$H_t$ 具相同的拓扑度．而两个相邻区间 $[t_{j-1},t_j]$ 与 $[t_j,t_{j+1}]$ 有公共端点 t_j，因而得出从 t_{j-1} 到 t_{j+1}，H_t 具相同的拓扑度．从而得出 H_t 的拓扑度在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 取常值．特别是 $H_0=f$ 与 $H_1=g$ 具相同的度．∎

注 H.Hopf 还证明了从 S^n 到 $S^n(n\geqslant 1)$ 的两个连续映射 f 与 g 是同伦的充要条件，是它们具相同的拓扑度．其证明超出本书范围.

定理 对任意 $n\geqslant 0$，n 维球面 S^n 是不可缩的.

证明 当 $n\geqslant 1$，S^n 上的恒同映射具拓扑度 1，而常值映射具拓

扑度零. 由于同伦的映射具相同的度, 因此 $S^n(n\geq 1)$ 的恒同映射不可能是零伦的, 因此 $S^n(n\geq 1)$ 不可缩. 至于 $n=0$, 则 $S^n=\{x\in R \mid x^2=1\}=\{-1,1\}$ 是离散的两点, 因而当然是不可缩的. ▌

定理　不存在从 $(n+1)$ 维球体 $B^{n+1}=\{x=(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2\leqslant 1\}$ 到 n 维球面 $S^n(n\geqslant 0)$ 的连续映射, 使 S^n 的每个点均保持不动.

证明　利用反证法. 假如存在连续映射 $f:B^{n+1}\to S^n$ 使得对每点 $x\in S^n$, 满足条件 $f(x)=x$. 我们定义一个同伦 $H:S^n\times I\to S^n$ 为 $H(x,t)=f((1-t)x)$, $x\in S^n$, $t\in I$. 此中 $(1-t)x$ 表示实数(0 到 1 之间)与向量 x 的数乘, 表明 H 是 S^n 上的一个收缩. 而由上面的定理, 这是不可能的. ▌

定理　假设 $f:B^{n+1}\to B^{n+1}$ 是 $(n+1)$ 维球体到自身的连续映射 $(n\geqslant 0)$, 则 f 至少有一个不动点.

证明　利用反证法. 假如 f 不具不动点, 则对一切 $x\in B^{n+1}$, $f(x)$ 与 x 不同, 考虑从 $f(x)$ 到 x 的射线, 而令 $g(x)$ 为这射线与 S^n 的交点, 于是得出一个连续映射 $g:B^{n+1}\to S^n$, 它满足 $g(x)=x$, $x\in S^n$; 与上述定理矛盾. ▌

定义　对每个整数 i, $1\leqslant i\leqslant n+1$, 映射 $r_i:S^n\to S^n$ 由 $r_i(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,x^{i-1},-x^i,x^{i+1},\cdots,x^{n+1})$, $(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})\in S^n$ 所决定, 则称 r_i 是 S^n **关于第 i 轴的反射**.

定义　映射 $a:S^n\to S^n$ 由 $a(x)=-x$, $x\in S^n$ 所决定者, 称为 S^n 上的**对径映射**. 此中 $-x$ 表示 x 的对径点.

从定义即知 S^n 上的对径映射 a 是 S^n 诸反射 $r_1,r_2,\cdots,r_{n+1}$ 的复合 $r_1r_2\cdots r_{n+1}$.

定理　(i)　S^n 上每个反射具度 -1;

(ii) S^n 上的对径映射具度$(-1)^{n+1}$.

证明 (i)取 S^n 的特殊剖分((图3-27)表示 S^2 的八面形剖分)令 $e_i=(0,\cdots,0,1,0\cdots,)\in R^{n+1}$;其中第 i 个坐标是 $+1$,而 $-e_i=(0,\cdots,0,-1,0,\cdots,)$ 表示第 i 个坐标为 -1.因此对 $i_0<i_1<\cdots<i_p$, $e_{i_0},\cdots,e_{i_p}$ 是几何独立的,它们张成 R^{n+1} 中的 p 维单形.所有这种单形组成的复形记为Σ,则

$$|\Sigma|=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}\mid\sum_{i=1}^{n+1}|x^i|=1\}$$

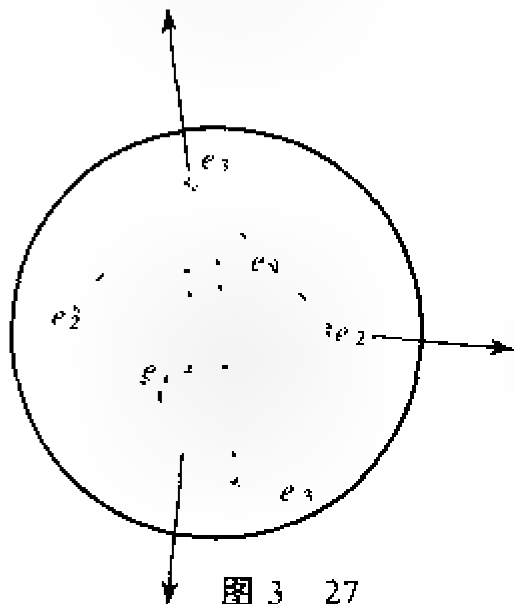


图3-27

从球心出发的射线给出 S^n 的剖分 $\varphi:|\Sigma|\to S^n$. 于是$(e_1e_2\cdots e_{n+1})$与$(-e_1e_2\cdots e_{n+1})$是两个不同定向的 n 维基础单形.而 $z=(e_1e_2\cdots e_{n+1})+\cdots+(-e_1e_2\cdots e_{n+1})+\cdots\cdots$ 是$H_n(\Sigma)$的母元. $\hat{r}_1=\varphi^{-1}r_1\varphi:|\Sigma|\to|\Sigma|$.是$|\Sigma|$关于第1个坐标平面的反射.单纯映射 $\hat{r}_1$ 决定的链映射$(\hat{r}_1)_n(e_1e_2\cdots e_{n+1})=(-e_1e_2\cdots e_{n+1}),\cdots\cdots$, $(\hat{r}_1)_n(-e_1e_2\cdots e_{n+1})=(e_1e_2\cdots e_{n+1}),\cdots\cdots$ 因此,$(\hat{r}_1)_n(z)=-z$. $(\hat{r}_1)_{*n}([z])=-[z]$,即 $\deg(r_1)=-1$.

(ii)$\deg a=\deg(r_1r_2\cdots r_{n+1})=\deg(r_1)\deg(r_2)\cdots\deg(r_{n+1})=(-1)^{n+1}$ ▌

定义 S^n 上的**连续单位切向量场**,或简称**向量场**,是一个连续映射 $f:S^n\to S^n$,使得对每个 $x\in S^n$, $f(x)$ 与 x 是垂直的(图3-28).

对于 R^n 中两个向量 $x=(x^1,\cdots,x^n)$与 $y=(y^1,\cdots,y^n)$,则它

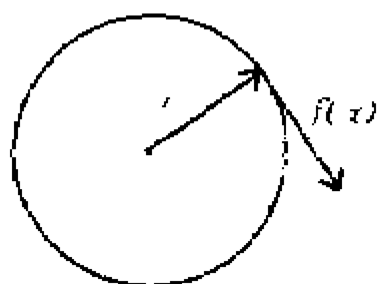


图 3-28

们相互垂直当且仅当 x 与 y 的数量积等于零，即 $x\cdot y = x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n = 0$.

定理 $S^n(n\geqslant 1)$上存在向量场当且仅当 n 是奇数.

证明 当 n 是奇数，则 $n+1$ 是偶数，这时 S^n 上一个向量场 f 可定义为
$f(x) = f(x^1,\cdots,x^{n+1}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{n+1}, x_n)$，$(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n$. f 显然是连续的，而且对 $x\in S^n$，
$x\cdot f(x) = (-x^1x^2 + x^2x^1) + (-x^3x^4 + x^4x^3) + \cdots + (-x^nx^{n+1} + x^{n+1}x^n) = 0$，
所以 $f(x)$是 S^n 上的向量场.

假如 n 是偶数，而且 $g:S^n\to S^n$ 是一个向量场，则 $x\cdot g(x) = 0$，$x\in S^n$. 我们定义一个同伦 $H:S^n\times I\to S^n$ 为

$H(x,t) = x\cos(t\pi) + g(x)\sin(t\pi)$，$x\in S^n$，$t\in I$.

则 $\|H(x,t)\|^2 = H(x,t)\cdot H(x,t) = \|x\|^2\cos^2(t\pi) + 2x\cdot g(x)\cos(t\pi)\sin(t\pi) + \|g(x)\|^2\sin^2(t\pi) = 1\cdot\cos^2(t\pi) + 0 + 1\cdot\sin^2(t\pi) = 1$，对所有 $t\in I$ 成立. 所以 H 是 S^n 上的恒同映射和对径映射的同伦. 然而恒同映射的度为 1，而对径映射的度是 $(-1)^{n+1} = -1$(因为 n 是偶数)，这与同伦的映射具相同的度发生矛盾. 所以 n 为偶数时，S^n 的向量场不存在 ▍

§7 关于同调群的拓扑不变性的补充

在§5曾在附注中指出：同一个连续映射的不同的单纯逼近

所诱导的同调群同态是相同的．而且连续映射的诱导同态与相应的复形的重分次数无关．为了证明这些结论，我们先引进下面的概念．

定义　设 $\varphi=\{\varphi_p: C_p(K)\to C_p(L)\}$ 与 $\psi=\{\psi_p: C_p(K)\to C_p(L)\}$ 是两个链映射，如果存在同态序列 $D=\{D_p: C_p(K)\to C_{p+1}(L)\}$ 使得对一切整数 p，$\varphi_p-\psi_p=\partial D_p+D_{p-1}\partial$ 成立，则称链映射 φ 与 ψ 是**链同伦的**，该同态序列 D 称为连接 φ 与 ψ 的**链同伦**，通常以 $\varphi\simeq\psi$ 表示．

命题　设链映射 φ 与 ψ 是链同伦的，则它们的诱导同态相同，即 $\varphi_{*p}=\psi_{*p}: H_p(K)\to H_p(L)$．

证明　对任意的 $z\in Z_p(K)$，$\partial z=0$，从链同伦的定义，$\varphi_p(z)-\psi_p(z)=\partial D_p(z)+D_{p-1}\partial z=\partial D_p(z)\in B_p(L)$，表明 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 属于同一个同调类，即 $\varphi_{*p}[z]=\psi_{*p}[z]$． ▌

定理 1　设 $\varphi,\psi: K\to L$ 是连续映射 $f: |K|\to|L|$ 的两个单纯逼近，则 $\varphi_{*p}=\psi_{*p}: H_p(K)\to H_p(L)$．

证明　先考查有关连续映射 f 的不同单纯逼近之间的一些关系．设 φ 是 f 的单纯逼近，而单纯逼近 $\bar\varphi$ 与 φ 只在 K^0 上的一顶点 a_0 处取不同值，假设 $\bar\varphi^0$ 在 K^0 上取值为

$$\bar\varphi^0(a)=\begin{cases}\varphi(a), & a\neq a_0\\ b_0, & a=a_0\end{cases};$$

而且满足 $f(\mathrm{ost}\,a_0)\subset\mathrm{ost}\,b_0$，则由 $\bar\varphi^0$ 所决定的单纯映射 $\bar\varphi: K\to L$ 还是 f 的单纯逼近；这是因为 φ 是 f 的单纯逼近，当 $a\neq a_0$，$f(\mathrm{ost}\,a)\subset\mathrm{ost}\,\varphi(a)=\mathrm{ost}\,\bar\varphi^0(a)$，而且当 $a=a_0$，$f(\mathrm{ost}\,a_0)\subset\mathrm{ost}\,b_0=\mathrm{ost}\,\bar\varphi^0(a_0)$．

再者，对 f 的任两个单纯逼近 φ 与 φ'，则存在着 f 的单纯逼近有

限序列 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 使得 $\varphi = \varphi_0$ 和 $\varphi' = \varphi_k$，而且该序列中相邻两个单纯逼近在 K^0 上取值除了一个顶点外都相同.（例如 $K^0 = \{a_1, \cdots, a_{\alpha_0}\}$，$\varphi(a_i) = \varphi'(a_i)$，$i = 1, 2, \cdots, p$，而 $i = p+1, \cdots, \alpha_0$ 时，$\varphi(a_i) \neq \varphi'(a_i)$. 令 $\varphi_j^0(a_i) = \begin{cases} \varphi_{j-1}(a_i), & i \neq p+j \\ \varphi'(a_i), & i = p+j \end{cases}$ $\quad (j = 1, \cdots, k = \alpha_0 - p)$.

于是 φ_j^0 决定单纯逼近 φ_j，满足 $\varphi_0 = \varphi$，$\varphi_k = \varphi'$，而且 φ_{j-1} 与 φ_j 只有一个顶点不同）

现在考查 K 中的单形 $\sigma = (a_0 \cdots a_p)$，则有 $f(\operatorname{int} \sigma) \subset f(\operatorname{ost} a_i) \subset \operatorname{ost} \varphi(a_i)$，$i = 0, 1, \cdots, p$. 此中 φ 是 f 的单纯逼近. 当 φ' 也是 f 的单纯逼近，则有 $f(\operatorname{ost} a_i) \subset \operatorname{ost} \varphi'(a_i)$，$i = 0, \cdots, p$；因此 $f(\operatorname{int} \sigma) \subset (\bigcap_{i=0}^{p} \operatorname{ost} \varphi(a_i)) \cap (\bigcap_{i=0}^{p} \operatorname{ost} \varphi'(a_i)) \neq 0$. 因此 $\varphi(a_0), \cdots, \varphi(a_p), \varphi'(a_0), \cdots, \varphi'(a_p)$ 是 L 中一个单形的诸顶点.

由于 f 的任两个单纯逼近 φ 与 φ' 可归结为一个单纯逼近有限序列，使得相邻两个在 K^0 上只有一个顶点取不同值，因此可将问题化简为 φ 与 φ' 在 K^0 上除一点 a_0 外都取相同值. 根据前面命题，我们构作链映射 $\varphi = \{\varphi_p : C_p(K) \to C_p(L)\}$ 与 $\varphi' = \{\varphi'_p : C_p(K) \to C_p(L)\}$ 的链同伦 $D = \{D_p : C_p(K) \to C_{p+1}(L)\}$ 为：

当 $p<0$ 或 $p>\dim K$，令 $D_p = 0$；

当 $p = 0$，令 $D_0 : C_0(K) \to C_1(L)$ 为

$$D_0(a) = \begin{cases} 0, & a \neq a_0 \\ ((\varphi'(a_0), \varphi(a_0))), & a = a_0; \end{cases} \qquad \text{再作线性补充.}$$

于是当 $a \neq a_0$，$\partial_0 D(a) + D_{-1} \partial a = 0 + 0$ 而且 $\varphi_0(a) - \varphi'_0(a) = 0$，所以 D_0 满足链同伦条件. 而当 $a = a_0$，则 $\partial_0 D_0(a_0) + D_{-1} \partial a_0 = \partial(\varphi'(a_0) \varphi(a_0)) = \varphi(a_0) - \varphi'(a_0)$，也满足链同伦条件. 对

$0<p<\dim K$,定义 $D_p: C_p(K)\to C_{p+1}(L)$ 为对 $C_p(K)$ 中任一基本链 σ^p,

$$D_p(\sigma^p)=\begin{cases}0, & 当\ \sigma^p\ 不以\ a_0\ 为顶点;\\ (\varphi'(a_0)\varphi(a_0))\tau^{p-1}, & 当\ \sigma^p\ 以\ a_0\ 为顶点,\end{cases}$$

即取形式 $\sigma^p=a_0\sigma^{p-1}$,令不含 a_0 的 σ^{p-1} 在 φ 或 φ' 之下的像为 τ^{p-1}. 此外,当 $\varphi'(a_0)$, $\varphi(a_0)$ 与 τ^{p-1} 诸顶点不相同时,$(\varphi'(a_0)\varphi(a_0))\tau^{p-1}$ 取零值,否则它张成一个定向单形.

因此,对 $\sigma^p=a_0\tau^{p-1}$ 时,

$$\begin{aligned}\partial D_p(\sigma^p)+D_{p-1}\partial\sigma^p&=\partial((\varphi'(a_0)\varphi(a_0))\tau^{p-1})+D_{p-1}(\sigma^{p-1}-a_0\partial\sigma^{p-1})\\&=\varphi(a_0)\tau^{p-1}-\varphi'(a_0)\tau^{p-1}+(\varphi'(a_0)\varphi(a_0))\partial\tau^{p-1}-D_{p-1}(a_0\partial\sigma^{p-1})\\&=\varphi(a_0)\tau^{p-1}-\varphi'(a_0)\tau^{p-1}+(\varphi'(a_0)\varphi(a_0))\partial\tau^{p-1}\\&\quad-(\varphi'(a_0)\varphi(a_0))\partial\tau^{p-1}=\varphi_p(\sigma^p)-\varphi'_p(\sigma^p).\end{aligned}$$

其中从第二个等式到第三个等式的最后一项是根据 D_{p-1} 的定义,而最后一等式是由于 $\varphi(a_0)\tau^{p-1}=\varphi(a_0)\varphi(\sigma^{p-1})=\varphi(a_0\sigma_{p-1})=\varphi_p(\sigma^p)$. 对 σ^p 不含 a_0 时,则 $D_p(\sigma^p)=0$, $D_{p-1}\partial\sigma^p=0$,而且 $\varphi_p(\sigma^p)=\varphi'_p(\sigma^p)$;因此也满足链同伦条件.根据命题,$\varphi\simeq\varphi'$,因此 $\varphi_*=\varphi'_*$. ▌

以下将证明连续映射的单纯逼近的诱导同态与 K 的重心重分次数无关,为此,先证明两个命题:

命题 1 定义顶点映射 $\pi^0:(SdK)^0\to K^0$ 为:对一点 $\sigma\in(SdK)^0$ 映为 σ 的任一指定顶点 a. 则 π_0 可扩充为单纯映射 $\pi: SdK\to K$;而且 π 是恒同映射 $1_{|K|}: SdK\to K$ 的单纯逼近

证明　设$(\dot\sigma^0\dot\sigma^1\cdots\dot\sigma^p)\in Sd\,K$，其中$\sigma^0<\sigma^1<\cdots<\sigma^p$，因为$\pi^0(\dot\sigma^i)(i=0,\cdots,p)$都是$\sigma^p$的顶点，所以$\pi^0$是$Sd\,K\to K$的顶点间映射，通过线性扩充，决定了单纯映射$\pi$. 于是对任意的$x\in|Sd\,K|$，设$x=\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\dot\sigma^i\in Sd\,K$是某个单形$\tau^p=(\dot\sigma^0\cdots\dot\sigma^p)$的内部，这时$1_{|K|}(x)=x\in\sigma^p$内部，而$\pi(x)=\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\pi^0(\dot\sigma^i)\in\sigma^p$，所以$\pi$是$1_{|K|}$的单形迫近. ▌

命题2　单纯映射$\pi: Sd\,K\to K$决定的链映射$\pi=\{\pi_p: C_p(Sd\,K)\to C_p(K)\}$与重分的链映射$Sd=\{Sd_p: C_p(K)\to C_p(Sd\,K)\}$满足：(i)$\pi_p\circ Sd_p=1_{C_p(K)}$；(ii)$Sd_p\pi_p\simeq 1_{C_p}(Sd\,K)$

证明　用归纳法加以证明

当$p=0$，对$a\in K^0$，$\pi_0Sd(a)=a=1_{C_p(K)}(a)$，显然成立. 假设$\pi_{p-1}Sd_{p-1}=1_{C_{p-1}(K)}$成立. 我们取$Sd\,K$中的$p$维单形$\tau^p$，并假设它是$K$中某个$p$维单形$\sigma^p$的重心重分的一个小单形，则$\pi_p(\tau^p)=\epsilon\sigma^p$，此中$\epsilon=0,1$或$-1$视$\tau^p$是坍塌或与$\sigma^p$定向是否协调而定. 于是对$K$中任意$p$维基本链$1\cdot\sigma^p$，$Sd(\sigma^p)$是$Sd\,K$中具所述性质的小$p$维单形的代数和，因此

$\pi_pSd_p(\sigma^p)=\pi_p(\dot\sigma^pSd_{p-1}\partial\sigma^p)=k\sigma^p$，此中$k\in\mathbf{Z}$. 然而由于边缘运算$\partial$与$\pi$，$Sd$均可交换和归纳假设，$k\partial\sigma^p=\partial(k\sigma^p)=\partial\pi_pSd_p(\sigma^p)=\pi_{p-1}Sd_{p-1}(\partial\sigma^p)=\partial\sigma^p$，与上式比较得出$k=1$，因此$\pi_pSd_p\sigma^p=\sigma^p$，完成了(i)的证明.

(ii)我们仅须证明$Sd_p\pi_p$与$1_{C_p(Sd\,K)}$之间存在链同伦即可. 为此定义$D_p: C_p(Sd\,K)\to C_{p+1}(Sd\,K)$为：

当$p=0$，设$\dot\sigma$是$Sd\,K$中任一顶点，$\pi(\dot\sigma)=a$是σ的一个顶点，于是有$Sd_0\pi_0(\dot\sigma)=Sd_0(a)=a$. 然而$1_{C_0(Sd\,K)}(\dot\sigma)=$

$Sd_0\pi_0(\hat{\sigma})\quad \hat{\sigma}\quad a$，而且$(a\,\hat{\sigma})\in SdK$，这时定义 $D_0(\hat{\sigma})=(a\,\hat{\sigma})\in C_1(Sd\,K)$，通过线性扩充得出同态 $D_0:C_0(Sd\,K)\to C_1(Sd\,K)$，当令 $D_{-1}=0$，则有关系式

$$1_{C_0(Sd\,K)}-Sd_0\pi_0=\partial D_0+D_{-1}\partial$$

假设对满足链同伦条件的 $D_0,D_1,\cdots,D_{p-1}(p\geq 1)$ 已经有定义，亦即对 $q<p$，我们有诸关系式

$$1_{C_q(Sd\,K)}-Sd_q\pi_q=\partial D_q+D_{q-1}\partial,(q<p)$$

而且其中对 $\tau^q\in Sd\,K$，$D_q(\tau^q)\in C_{q+1}(Sd\,K)$。

现假设 $\tau^p=(\hat{\sigma}^0\cdots\hat{\sigma}^p)$，此中 $\sigma^0<\cdots<\sigma^p$，是 $Sd\,K$ 中一个 p 维基本链，由归纳假设

$\partial\tau^p-Sd_{p-1}\pi_{p-1}(\partial\tau^p)=\partial D_{p-1}(\partial\tau^p)+D_{p-2}\partial(\partial\tau^p)$
$=\partial D_{p-1}(\partial\tau^p)$，然而链 $z=\tau^p-Sd_p\pi_p\tau^p-D_{p-1}\partial\tau^p$ 的边缘链 ∂z，由上式即得出 $\partial z=\partial\tau^p-\partial Sd_p\pi_p\tau^p-\partial D_{p-1}\partial\tau^p=\partial\tau^p-Sd_p\pi_p\partial\tau^p-\partial D_{p-1}\partial\tau^p=0$ 这表示 z 是闭链，根据§2 例 9，$H_p(Sd\sigma^p)=0$，所以 z 是 $Sd\sigma^p$ 上的边缘链，即存在 $c_{p+1}\in C_{p+1}(Sd\,\sigma^p)\subset C_{p+1}(Sd\,K)$，满足 $z=\partial c_{p+1}$，我们定义 $D_p(\tau^p)=c_{p+1}$，即得出关系式：

$\tau^p-Sd_p\pi_p\tau^p=\partial_p D_p(\tau^p)+D_{p-1}\partial\tau^p$，通过线性扩充得出同态 $D_p:C_p(Sd\,K)\to C_{p+1}(Sd\,K)$，它满足条件

$$1_{C_p(Sd\,K)}-Sd_p\pi_p=\partial D_p+D_{p-1}\partial,\quad D_p(\tau^p)\in C_{p+1}(SdK).$$ ▮

定理 2　（重分不变性定理）诱导同态 $\pi_*=\{\pi_{*p}:H_p(Sd\,K)\to H_p(K)\}$ 与 $Sd_*=\{Sd_{*p}:H_p(K)\to H_p(Sd\,K)\}$ 是互逆的同构

证明　由上面的命题 2，得出 $\pi_{*p}Sd_{*p}=1_{H_p(K)}$，$Sd_{*p}\pi_{*p}=$

$1_{H_p(SdK)}$，定理得证 ▍

从前面的定理 1 和上述定理 2，即可证明连续映射的诱导同态与单纯逼近的选择以及相应复形的重分次数无关，从而完全解决了 § 5 的附注中所提出的结论.

定理　设 $f: |K| \to L$ 是连续映射，$f: |K^{(m)}| \to L$ 具单纯逼近 $\varphi: K^{(m)} \to L$，则对所有的 p，同态

$$\varphi_{*p} \cdot Sd_{*p}^{(m)}: H_p(K) \to H_p(L)$$

与重分次数无关.

证明　只须证明对任意的单纯逼近 $\psi: K^{(m+1)} \to L$，$\varphi_{*p} Sd_{*p}^{(m)} = \psi_{*p} Sd_{*p}^{(m+1)}$ 即可. 我们有下面的交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
H_p(K) & \xrightarrow{Sd_{*p}^{(m)}} & H_p(K^{(m)}) & \xrightarrow{\varphi_{*p}} & H_p(L) \\
& \searrow^{Sd_{*p}^{(m+1)}} & Sd_{*p} \downarrow \uparrow \pi_{*p} & \nearrow_{\psi_{*p}} & \\
& & H_p(K^{(m+1)}) & &
\end{array}$$

利用 ψ 与 $\varphi\pi$ 都是 $f: K^{(m+1)} \to L$ 的单纯逼近，由定理 1，$\psi_{*p} = \varphi_{*p}\pi_{*p}$；再由定理 2，即得出

$$\psi_{*p} Sd_{*p}^{(m+1)} = \varphi_{*p}\pi_{*p} Sd_{*p}^{(m+1)} = \varphi_{*p} Sd_{*p}^{(m)}.$$ ▍

最后，再把同调群的诱导同态的主要性质作下述补充.

定理　设 $f: |K| \to |L|$ 是连续映射，f 的诱导同态 $f_* = \{f_{*p} = \varphi_{*p} Sd_{*p}^{(m)}: H_p(K) \to H_p(L)\}$；

(i)　设 $g: |L| \to M$ 也是连续映射，则

$$(gf)_{*p} = g_{*p} f_{*p}: H_p(K) \to H_p(M);$$

(ii)　$(1_{|K|})_{*p} = \{1_{H_p(K)}: H_p(K) \to H_p(K)\}$；

(iii)　$f \simeq g: |K| \to |L|$，则 $f_{*p} = g_{*p}: H_p(K) \to H_p(L)$.

证明　(i)　设存在正整数 n 使得 $\psi: L^{(n)} \to M$ 是 $g: L^{(n)}$

$\to M$ 的单纯逼近，而且存在正整数 m 使得 $f: |K^{(m)}|\to|L^{(n)}|$ 具单纯逼近 $\omega: K^{(m)}\to L^{(n)}$. 设 $\pi^{(n)}: L^{(n)}\to L$ 是由 $\pi: L^{(1)}\to L$ 归纳地定义的单纯逼近. 则 $\varphi=\pi^{(n)}\omega$ 是 $f: |K^{(m)}|\to|L|$ 的单纯逼近. 从下面的交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
K & \xrightarrow{\quad f\quad} & L & \xrightarrow{\quad g\quad} & M \\
{\scriptstyle Sd^{(m)}}\downarrow & \overset{\varphi}{\nearrow} & {\scriptstyle Sd^{(n)}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \pi^{(n)}} & \overset{\psi}{\nearrow} & \\
K^{(m)} & \xrightarrow[\omega]{\quad\quad} & L^{(n)} & &
\end{array}$$

根据诱导同态的定义即有

$$f_{*p}=\varphi_{*p}Sd^{(m)}_{*p},\quad g_{*p}=\psi_{*p}Sd^{(n)}_{*p},$$

利用关系式 $\varphi_{*p}=\pi^{(n)}_{*p}\omega_{*p}$, $Sd^{(n)}_{*p}\pi^{(n)}_{*p}=1_{L^{(n)}}$，即得出 $g_{*p}f_{*p}=$

$$\psi_{*p}Sd^{(n)}_{*p}\varphi_{*p}Sd^{(m)}_{*p}=\psi_{*p}Sd^{(n)}_{*p}\pi^{(n)}_{*p}\omega_{*p}Sd^{(m)}_{*p}=\psi_{*p}\omega_{*p}Sd^{(m)}_{*p},$$

而 $(gf)_{*p}=(\psi\omega)_{*p}Sd^{(m)}_{*p}=\psi_{*p}\omega_{*p}Sd^{(m)}_{*p}$,

因此 $(gf)_{*p}=g_{*p}\circ f_{*p}$.

(ii) 由于恒同映射所决定的链映射是恒同同构，因此它的诱导同态也是恒同同构.

(iii) 设 $f\simeq g$, $H: |K|\times I\to|L|$ 是连接 f 与 g 的同伦. 对 $t\in I$, 令 $h_t=H(x,t): |K|\to|L|$, $x\in|K|$, $t\in I$. 因为 $\{\text{ost } b \mid b\in L^0\}$ 是 L 的开覆盖，$\{H^{-1}(\text{ost } b)\mid b\in L^0\}$ 是紧致度量空间 $|K|\times I$ 的开覆盖，由 Lebesgue 引理，存在非负整数 m 和正整数 n 使得 $K^{(m)}$ 的每个顶点 a 和 I 的 n 次等分为 n 个小区间 $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ $(k=1,2,\cdots,n)$，存在 $b\in L^0$ 满足 $(\text{ost } a)\times[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\subset H^{-1}(\text{ost } b)$. 因为 $h_{\frac{k-1}{n}}(\text{ost } a)\subset\text{ost } b$, $h_{\frac{k}{n}}(\text{ost } a)\subset\text{ost } b$，所以可对 $h_{\frac{k-1}{n}}$ 和 $h_{\frac{k}{n}}$ 取相同的单纯逼近 $\varphi_k: K^{(m)}\to L$，它由顶点映射 $\varphi_k^0(a)$

$= h$ 所确定. 从而有 $(h_{\frac{k-1}{n}})_{*p} = (h_{\frac{k}{n}})_{*p}$ $(k = 1, \cdots, n)$ 因此 $f_{*p} = (h_0)_{*p} = \cdots = (h_1)_{*p} = g_{*p}$. ▌

习　　题

1　R^n 中的点集 $\{a_0, a_1, \cdots, a_p\}$ 是几何无关的，意思是它们不落在 $p-1$ 维超平面上．证明这时诸向量的集合 $\{a_1-a_0, \cdots, a_p-a_0\}$ 是线性无关的，而且反之也成立．

2　证明在一单形中每点的重心坐标是唯一的．

3　验证一个几何复形 K 的 r 维骨架是一个几何复形．

4．R^n 中一子集 C 称为一个凸集，假如 C 包含该两点，则它必包含以该两点为线段端点的线段的每个点．设 A 是 R^n 的非空子集，则包含 A 的所有凸集的交称为 A 的**凸包**．证明：

(i) A 的凸包是凸集，因此它是包含 A 的最小凸集．

(ii) 若 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_p\}$ 是几何无关的点组，则 A 的凸包就是 p 维单形 $(a_0, a_1, \cdots, a_p)$．因此有时也以此作为 p 维单形的定义．

5．设在 R^{n+1} 中的 $(n+1)$ 维单形 $\sigma^{n+1} = (a_0 \cdots a_{n+1})$ 具诸顶点如下：a_0 为原点，对 $i \geqslant 1$，a_i 是第 i 个坐标为 1 而其余坐标为 0 的点．设 K 表示 σ^{n+1} 的闭包的 n 维骨架，通过显示 S^n 与 $|K|$ 之间的同胚而证明 S^n 是可剖分的．

6．设 K 是由 2 维单形 $(a_0 a_1 a_2)$ 的一切真面构成的复形，赋予以顺序 $a_0 < a_1 < a_2$ 诱导的定向．计算 K 的各维同调群．

7．设下图是圆柱面 C 的一个三角剖分，计算 C 的各维同调群．

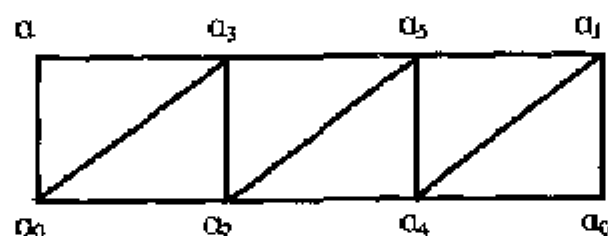


图 3-29

8. 证明一个复形的组合连通分支的几何承载与相应的多面体 $|K|$ 的连通分支是相同的.

9. 证明复形 K 的 p 维 Betti 数是 p 维同调群 $H_p(K)$ 的自由部分的秩.

10. 求环面 T 的最小三角剖分（注：它的各维同调群为：$H_0(T)\cong \mathbf{Z}$, $H_1(T)\cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, $H_2(T)\cong \mathbf{Z}$）

11. 设 K 为一复形，K^r 是它的 r 维骨架，证明 $H_p(K)$ 与 $H_p(K^r)$ 同构 $(0\leqslant p< r)$

12. 说明环面可定向而射影平面和 Klein 瓶都是不可定向的

13. 设 K 是 n 维单形的闭包. 证明对 $0< p\leqslant n$, $H_p(K)=\{0\}$, 并从此证明 $H_p(S^n)=\{0\}$.

14. 证明可定向的 n 维伪流形，对它的 n 维单形恰有两个密合的定向

15. 设 K 是可定向 n 维伪流形，证明 $H_n(K)\cong \mathbf{Z}$

16. 给出一个例子表明两个多面体 $|K|$ 与 $|L|$ 对每个 p, $H_p(K)$ 与 $H_p(L)$ 均同构. 但是 $|K|$ 与 $|L|$ 不同胚

17. 设 K 与 L 为复形，而 $\{\varphi_p\}$ 是同态序列 $\varphi_p: C_p(K)\to C_p(L)$ 满足 $\partial_p\varphi_p=\varphi_{p-1}\partial_p\ (p\geqslant 1)$ 的链映射，而 $\varphi_{*p}: H_p(K)\to$

$H_p(L)$表示φ_p的诱导同态. 证明当$H_p(K)$中有$[z_p]=[w_p]$时, 则在$H_p(L)$中有$[\varphi_p(z_p)]=[\varphi_p(w_p)]$.

18. 证明每个单纯映射 $\varphi:|K|\to|L|$ 是连续的.

19. 证明复形 K 的诸顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_m$ 是 K 中一单形的诸顶点的充要条件是 $\bigcap_{i=0}^{m}\text{ost}(v_i)\neq\emptyset$.

20. 证明: (i) 设 x 与 y 是单形 σ 的两点, 则存在 σ 的一个顶点 v 使得 $|x-y|\leqslant|x-v|$.

(ii) 单形 $\sigma^p(p\geqslant 1)$ 的直径是它的 1 维面的极大值.

(iii) 维数为正的复形的网格是它的 1 维单形的最大长度.

21. 证明: 对映射 $f,g: S^n\to S^n$, 当 $\deg(f)=\deg(g)$, 则 $g_{*n}=f_{*n}: H_n(S^n)\to H_n(S^n)$.

22. 证明 S^n(n 为奇数)上每个向量场同伦于恒同映射和对径映射.

第四章 同调序列

§1 正合序列

对交换群 G_1 和 G_2，如果它们之间存在同构 $h: G_1 \to G_2$，也可记为存在诸同态 h, h_1, h_2 使得存在一个序列

$$0 \xrightarrow{h_1} G_1 \xrightarrow{h} G_2 \xrightarrow{h_2} 0 \qquad (1)$$

满足 $\ker h_2 = \operatorname{Im} h$ 而且 $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} h_1$，前者是因为 h 是满射，而后者是由于 h 是单射. 我们把上述的关系应用于三个交换群以及它们之间的同态所构成的序列，我们引进下面概念

定义 当序列 $G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3$
当满足关系式 $\operatorname{Im} f_1 = \ker f_2$，则称这三个群构成的序列在 G_2 处**是正合的**

根据这个定义，则 G_1 与 G_2 同构的充要条件是式(1)在 G_1

和 G_2 处都是正合的．我们把它加以推广得到下面的

定义 处处是正合的交换群序列称为**正合序列**．特别是正合序列

$$0 \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \to 0 \qquad (2)$$

称之为**短正合序列**．而交换群及同态的序列

$$\cdots \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \cdots \qquad (3)$$

满足诸关系式 $\mathrm{Im}(f_i)=\ker(f_{i+1})$，$i\in \mathbf{Z}$，则该序列称为**长正合序列**．

对短正合序列(2)，这时 $\ker(f_1)=0$，即 f_1 是单同态．我们把 G_2 在 f_1 之下的完全原像记为 G_1'，则 $G_1'\to G_2$ 是包含映射记为 i；而 f_2 是满同态，并且 $\ker(f_2)=\mathrm{Im}(f_1)$，因此 $G_2\to G_2/G_1'$ 是投影，记为 π；从此，在同构的意义下，短正合序列(2)可改写为另一个短正合序列

$$0\to G_1' \xrightarrow{i} G_2 \xrightarrow{\pi} G_2/G_1' \to 0 \qquad (4)$$

引理 （分裂引理） 设短正合序列

$$0\to A\xrightarrow{\varphi} B\xrightarrow{\psi} C\to 0 \qquad (5)$$

如果存在同态 $\rho: C\to B$ 使得 $\psi\rho=1_C$，则 $B\cong A\oplus C$．

证明 对任意的 $g\in B$，因为 $\psi(g-\rho\psi(g))=\psi(g)-1_C\psi(g)=0$，所以 $g-\rho\psi(g)\in\ker\psi=\mathrm{Im}\,\varphi$，因此 $g\in \mathrm{Im}\,\varphi+\mathrm{Im}\,\rho$，亦即 g 是 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 与 $\mathrm{Im}\,\rho$ 的元素的和．现证明 $\mathrm{Im}\,\varphi\cap\mathrm{Im}\,\rho=\{0\}$，从而得出 $B\cong \mathrm{Im}\,\varphi\oplus\mathrm{Im}\,\rho$．事实上，假如 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 与 $\mathrm{Im}\,\rho$ 的交非零元，则存在 $0\neq g=\varphi(a)=\rho(c)$，此中 $a\in A$，$c\in C$．然而 $\psi\rho=1_C$ 和正合性，我们得出 $c=\psi\rho(c)=\psi\varphi(a)=0$，从而 $g=\rho(c)=0$ 得出矛盾．所以 $Im\,\varphi\cap Im\,\rho=\{0\}$．

此外，由于 φ 是单同态，所以 $Im\,\varphi\cong A$．而从 $\psi\rho=1_C$ 即知 ρ

也是单同态，所以 $Im\psi \cong C$，因此有 $B \cong A \oplus C$. ▌

前述的 ρ 称为**分裂同态**；这时短正合序列(5)称为**可分裂的**.

剩下的是要证明当 C 是交换群，则分裂同态 ρ 是存在的.

当 C 是交换群，设 $c_1, \cdots, c_n$ 是一组基，则对任意的 $c \in C$，存在唯一的一组整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得 c 可表为 $c = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n$. 由于 ψ 是满同态，所以存在 $b_1, \cdots, b_n \in B$，使得 $c_i = \psi(b_i)(i = 1, \cdots, n)$. 因此可以定义 $\rho: C \to B$ 为 $\rho(c) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$，这时 ρ 显然满足 $\psi\rho = 1_C$. ▌

定义　具相同指标集的群和同态的两个序列

$$\begin{array}{c} \cdots \to A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \to \cdots \\ \downarrow \\ \cdots \to B_1 \xrightarrow{\psi_1} B_2 \to \cdots \end{array} \tag{6}$$

如果有一个系列同态：$\alpha_i: A_i \to B_i$ 使得每个方块

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & A_{i+1} \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_{i+1} \\ B_i & \xrightarrow{\psi_i} & B_{i+1} \end{array}$$

都是可交换的，即 $\psi_i\alpha_i = \alpha_{i+1}\varphi_i$，则称该系列 $\{\alpha_i\}$ 是一个**同态**；这时该两系列(6)称为**同态序列**. 当诸 α_i 都是同构，则称该两序列(6)是**同构的**.

现在考虑一般的链复形和它们之间的链映射. 为方便起见，简记复形 K，L 等等的 p 维链群 $C_p(K)$，$C_p(L)$ 等等分别为 K_p，L_p 等；而以 φ_p，ψ_p 等表示 p 维链映射 $K_p \to L_p$.

假设有短正合序列

$$0 \to K_p \xrightarrow{\varphi_p} L_p \xrightarrow{\psi_p} M_p \to 0,$$

于是对每个 p，联系着 φ_p，ψ_p 诱导的同调群的同态 φ_{*p}，ψ_{*p}，从而

有同调群的序列

$$H_p(K)\xrightarrow{\varphi_{*p}}H_p(L)\xrightarrow{\psi_{*p}}H_p(M).$$

我们现在来考察这个序列与短正合序列的偏离情况. 为此, 我们假设有下列的无限图表, 其中每行都是短正合序列, 而且每个方块都是可交换的:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \to & K_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & L_{n+1} & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & M_{n+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} & & \\
0 & \to & K_n & \xrightarrow{\varphi_n} & L_n & \xrightarrow{\psi_n} & M_n & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \\
0 & \to & K_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & L_{n-1} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} & M_{n-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n-1}} & & \\
0 & \to & K_{n-2} & \xrightarrow{\varphi_{n-2}} & L_{n-2} & \xrightarrow{\psi_{n-2}} & M_{n-2} & \to & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

对上列无限图表, 我们要寻找联系相邻维数同调群之间的一个重要的同态. 对 M_n 中的闭链 z, $\partial_n z=0$, 由于 ψ_n 是满射, 所以存在着 $b\in L_n$, 使得 $\psi_n(b)=z$. 根据各方块的可交换性 $\partial_n\psi_n=\psi_{n-1}\partial_n$, $\psi_{n-1}\partial_n(b)=\partial_n\psi_n(b)=\partial_n z=0$, 由于 $\partial_n(b)\in L_{n-1}$, 通过第 n 行的正合性, 存在 $c\in K_{n-1}$ 使得 $\varphi_{n-1}(c)=\partial_n(b)$. 然而 $\varphi_{n-2}(\partial_{n-1}c)=\partial_{n-1}(\partial_n b)=0$, 从 φ 是单射, 所以 $\partial_{n-1}(c)=0$, 这表明 $c\in Z_{n-1}(K)$. 从而得出 $Z_n(M)\to Z_{n-1}(K)$ 由上述的对应 $z\mapsto c$ 所定义. 然而这个对应由于成员的选取不一定唯一, 因而这样的对应不是完全确定的. 但是我们将看到: 联系到同调群的成员的对应则是完全确定的. 为此, 设 $z, z'\in Z_n(M)$, 而且它们属于同一个同调类, 即 $z\sim z'$, 亦即存在 $a\in M_{n+1}$ 使得 $z'-z=\partial_{n+1}(a)$. 因为 ψ_n 是满射, 所以存在 $b, b'\in L_n$ 使 $\psi_n(b)=z$, $\psi_n(b')=z'$; 而且有 $c, c'\in K_{n-1}$ 使 $\varphi_{n-1}(c)=\partial b$,

$\varphi_{n-1}(c')=\partial b'$. 由于 ψ_{n+1} 也是满射，对 $a\in M_{n+1}$ 必有 $e\in L_{n+1}$ 使得 $\psi_{n+1}(e)=a$. 再根据每个方块的可交换性，$\psi_n(\partial_{n+1}e)=\partial_{n+1}\psi_{n+1}(e)=\partial_{n+1}a=z-z'$. 于是有 $\psi_n[(b-b')-\partial_{n+1}e]=0$，所以 $(b-b'-\partial_{n+1}e)\in ker\psi_n$，由第 n 行的正合性，该成员必属于 $Im\ \varphi_n$. 设 $c''\in K_n$ 使得 $\varphi_n(c'')=b-b'-\partial_{n+1}e$，于是 $\varphi_{n-1}(\partial_n c'')=\partial_n\varphi_n(c'')=\partial_n(b-b'-\partial_{n+1}e)=\partial_n b-\partial_n b'=\varphi_{n-1}(c-c')$，因为 φ_{n-1} 是单射，所以 $c-c'=\partial_n c''$，证明了 c 与 c' 是同调的闭链，这样便证明了存在完全确定的同态 $H_n(M)\to H_{n-1}(K)$ 由 $[z]\to[c]$ 所决定. 我们称这个同态是联系诸短正合序列：$0\to K_p\to L_p\to M_p\to 0$ $(p\in \mathbf{Z})$ 之间的**连接同态**，记为 Δ.

定理　设诸链复形与它们之间的链映射所构成的序列，对一切 $p\in\mathbf{Z}$，

$$0\to K_p\xrightarrow{\varphi_p}L_p\xrightarrow{\psi_p}M_p\to 0 \tag{7}$$

是短正合序列，则下面的长同调序列

$$\cdots\xrightarrow{\varphi_{*n}}H_n(L)\xrightarrow{\psi_{*n}}H_n(M)\xrightarrow{\Delta_n}H_{n-1}(K)\xrightarrow{\varphi_{*n-1}}H_{n-1}(L)\xrightarrow{\psi_{*n-1}}\cdots \tag{8}$$

是正合的，其中 Δ_n 是连接同态 $H_n(M)\to H_{n-1}(K)$.

证明　必须分别证明对任意的整数 p，$\ker\ \psi_{*p}\supset \mathrm{Im}\ \varphi_{*p}$ 而且 $\mathrm{Im}\ \varphi_{*p}\supset\ker\ \psi_{*p}$，从此得出 $\ker\ \psi_{*p}=\mathrm{Im}\ \varphi_{*p}$. 同理证明 $\ker\Delta_p=\mathrm{Im}\ \psi_{*p}$，$\ker\ \varphi_{*p}=\mathrm{Im}\ \Delta_p$. 这些均留给读者作为练习 ▌

命题　如下面图表所示，设链复形 K,L,M 及它们之间的链映射 φ,ψ 以及相应的 K',L',M' 和 φ',ψ' 所构成的序列是短正合序列，而且每个方块可交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K & \xrightarrow{\varphi} & L & \xrightarrow{\psi} & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \to & K' & \xrightarrow{\varphi'} & L' & \xrightarrow{\psi'} & M' & \to & 0
\end{array}$$

则相应的下列水平的长序列也是正合的，而且每个方块也是可交换的：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & H_n(L) & \xrightarrow{\psi_{*n}} & H_n(M) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(K) & \xrightarrow{\varphi_{*}} & H_{n-1}(L) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\beta_{*n}} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_{*n}} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{*n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_{*n-1}} & & \\
\cdots & \to & H_n(L') & \xrightarrow{\psi'_{*n}} & H_n(M') & \xrightarrow{\Delta'_n} & H_{n-1}(K') & \xrightarrow{\varphi'_{*}} & H_{n-1}(L') & \to & \cdots
\end{array}$$

证明 留给读者作为练习 ▌

§2 相对同调群

设 K 是单纯复形，L 是 K 的子复形，则称(K,L)为**复形偶**. 这时包含映射 $i:|L|\to|K|$ 是单纯映射. 当我们将链群 $C_p(L)$ 看为$C_p(K)$的子群，则它们所决定的链映射 $i_p:C_p(L)\to C_p(K)$ 是包含同态而且是单同态. 现在令 $C_p(K,L)=C_p(K)/C_p(L)$，则 $C_p(K,L)$ 中任一成员 $\bar{c}_p=c_p+C_p(L)$，$c_p\in C_p(K)$. 由于∂_p: $C_p(K)\to C_{p-1}(K)$满足$\partial(C_p(L))\subset C_{p-1}(L)$，因此$\partial_p$ 诱导出商群$C_p(K,L)$的同态$\bar{\partial}_p: C_p(K,L)\to C_{p-1}(K,L)$. 这时对任意的 $\bar{c}_p=c_p+C_p(L)\in C_p(K,L)$，$\bar{\partial}_p\bar{c}_p=\partial_p c_p+C_{p-1}(L)$. 不难验证 $\bar{\partial}_{p-1}\bar{\partial}_p$ 是零同态.

定义 对复形偶(K,L)，群 $C_p(K,L)$称为(K,L)的 **p 维相**

对链群或 K **模** L **相对** p **维链群** 同态 $\bar{\partial}_p: C_p(K,L)\to C_{p-1}(K,L)$ $(p\geqslant 1)$ 称为复形偶 (K,L) 的 p **维相对边缘同态**. $C_p(K,L)$ 的子群 $\ker\partial_p$ 记为 $Z_p(K,L)$, 称为 K **模** L **的** p **维相对闭链群**或 (K,L) 的 p **维相对闭链群**; $C_p(K,L)$ 的子群 $\mathrm{Im}\,\bar{\partial}_{p+1}$ 记为 $B_p(K,L)$, 称为 K **模** L **的** p **维相对边缘链群**, 或 (K,L) 的 p **维相对边缘链群**. **商群** $Z_p(K,L)/B_p(K,L)$, **记为** $H_p(K,L)$, 称为 (K,L) **的** p **维相对同调解, 或** K **模** L **的** p **维相对同调解**

为了说明上述定义的几何意义, 我们令 $C_p(K-L)=\{c_p\in C_p(K)\mid$ 当 $\sigma^p\in L, c_p(\sigma^p)=0\}$, 即 K 中不包含 L 中单形的 p 维链的集合, 因此 $C_p(K)=C_p(L)\oplus C_p(K-L)$, 或即 $C_p(K,L)\cong C_p(K-L)$. 从此可说 (K,L) 的 p 维相对链是 K 中不含 L 中 p 维单形的 p 维链. 相对 p 维闭链 $\bar{c}_p=c_p+C_p(L)$ 是满足 $\partial_p c_p\in C_{p-1}(L)$ 的 K 中 p 维链; 这时 $\bar{c}_p$ 本身可以不是闭链, 即 $\partial\bar{c}_p$ 不是零链, 但它属于 $C_{p-1}(L)$, 即落在 L 中. 类似地, 当 $\bar{c}_p\in B_p(K,L)$, 即存在 $c_{p+1}\in C_{p+1}(K)$, 使得 $\bar{c}_p=c_p+C_p(L)=\partial c_{p+1}+C_p(L)$, 或即 $c_p-\partial c_{p+1}\in C_p(L)$. 因此 p 维相对边缘链 $\bar{c}_p$ 作为 $C_p(K)$ 中的等价类, 它们任意一个代表本身可以不是边缘链. 而它与 K 中某个边缘链之差是 L 中的一条 p 维链.

例 1 设 K 是 $\sigma^2=(a_0a_1a_2)$ 的边界复形 $Bd\sigma^2$, 子复形 $L=(a_0)$.

这时任一个 $c_0(K)=g_0(a_0)+g_1(a_1)+g_2(a_2)$, $g_i\in Z(i=0,1,2)$ 所以 $C_0(K)=Z_0(K)\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. 而 $C_0(L)=Z_0(L)\cong\mathbf{Z}$, 因此 $C_0(K,L)=Z_0(K,L)\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ 它的任一成员取形式 $\bar{c}_0=g_1(a_1)+g_2(a_2)+C_0(L)$, $g_1 g_2\in\mathbf{Z}$

由于 $C_1(L)=0$, 所以有 $\bar{c}_0=\partial(g_1(a_0a_1)+g_2(a_0a_2))+C_0(L)=\bar{\partial}(g_1(a_0a_1)+g_2(a_0a_2)+C_1(L))$ 亦即有 $Z_0(K,L)=$

$B_1(K,L)$, 因此 $H_0(K,L)=0$.

设 $w=h_1(a_0a_1)+h_2(a_1a_2)+h_3(a_2a_0)+C_1(L)$ 是1维相对链，它的相对边缘链是 $\partial w=(h_1-h_2)a_1+(h_2-h_3)a_2+C_0(L)$，因此 $\partial w\in Z_1(K,L)$ 的充要条件是 $h_1=h_2=h_3$，亦即 $Z_1(K,L)=\mathbf{Z}w$，其中 $w=(a_0a_1)+(a_1a_2)+(a_2a_0)$；而由于 K 中不具2维单形，所以 $B_1(K,L)=0$. 因此 $H_1(K,L)\cong\mathbf{Z}$.

例2 设 $\sigma^2=(a_0a_1a_2)$, $K=\mathrm{Cl}\sigma^2$, $L=\mathrm{Bd}\sigma^2$. 这时 $C_0(K)=C_0(L)$，所以 $C_0(K,L)=0$ 因此 $H_0(K,L)=0$. 其次，$C_1(K)=C_1(L)$，所以 $C_1(K,L)=0$，因此 $H_1(K,L)=0$. 最后，$C_2(K)=\mathbf{Z}\sigma^2$, $C_2(L)=0$，所以 $C_2(K,L)=\mathbf{Z}\sigma^2$. 设 $z=g\sigma^2$ 是 $C_2(K,L)$ 中任一成员，则 $\partial z=g\partial\sigma^2\in C_1(L)$，所以 $\partial z=0$，于是 $Z_2(K,L)=C_2(K,L)\cong\mathbf{Z}$, $B_2(K,L)=0$ 因此 $H_2(K,L)\cong\mathbf{Z}$.

定义 设 $f:(|K_1|,|L_1|)\to(|K_2|,|L_2|)$ 是连续映射，不难验证 f 诱导出相对同调群的同态

$$f_{*p}:H_p(K_1,L_1)\to H_p(K_2,L_2);$$

称为 f 的诱导同态.

命题 诱导同态 $\bar{f}_*$ 具下列诸性质：

(i) 设 $1_{(|K|,|L|)}:(|K|,|L|)\to(|K|,|L|)$ 是恒同映射，则它诱导出恒同同构 $\bar{1}_{*p}=1_{H_p(K,L)}:H_p(K,L)\to H_p(K,L)$.

(ii) 设 $g:(|K_2|,|L_2|)\to(|K_3|,|L_3|)$ 也是连续映射，则 $(\overline{gf})_{*p}=\bar{g}_{*p}\bar{f}_{*p}:H_p(K_1,L_1)\to H_p(K_3,L_3)$.

(iii) 设 $f,g:(|K_1|,|L_1|)\to(|K_2|,|L_2|)$ 都是连续映射而且它们是同伦的，即存在连续映射

$H:(|K_1|\times I,|L_1|\times I)\to(|K_2|,|L_2|)$ 满足 $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$, $x\in(|K_1|,|L_1|)$；则

$f_{*p}=g_{*p}:H_p(K_1,L_1)\to H_p(K_2,L_2)$ ▌

从此可以验证相对同调群是多面体偶$(|K|,|L|)$的伦型不变量

下面介绍一个重要的定理,其中假设 L 是复形 K 的闭子复形,亦即 L 是 K 中闭子集,也称 $K-L$ 是 K 的一个开子复形

定理　(切除定理)设 L_1,L_2 是 K 的两个闭子复形,$L_1\cup L_2\supset K$,$L_1\cap L_2=L$,则复形偶的包含映射

$i:(|L_1|,|L|)\to(|K|,|L_2|)$的诱导同态

$i_{*p}:H_p(L_1,L)\to H_p(K,L_2)$是满同构

证明　包含映射 $i:(|L_1|,|L|)\to(|K|,|L_2|)$意味着 $i:L_1\to K$,$i|_L:L\to L_2$ 都是包含映射.因此对所有的 p,相应的链映射(仍沿用原来记号)$i_p:C_p(L_1)\to C_p(K)$,$i|_L:C_p(L)\to C_p(L_2)$都是同构,因此 $i:C_p(L_1,L)\to C_p(K,L_2)$也是同构 我们在此说明 i 还是满射:设 $c_p\oplus C_p(L)$是 $C_p(L_1,L)$中的相对 p 维链,它经过 i 映到 $c_p+C_p(L_2)$上去.对于 $C_p(K,L_2)$中给定一个 p 维相对链 $c'_p\oplus C_p(L_2)$,设 c''_p 是它的一个代表,则 $c''_p\in C_p(K-L_2)$,由于 $L_1\supset K-L_2$,所以 c''_p 在 L_1 中;因此 $c''_p+C_p(L)$是 $C_p(L_1,L)$中的 p 维相对链,它通过 i 映到给定的相对链 $c'_p\oplus C_p(L_2)$,所以 i 是满的 因此 $\bar{i}$ 是满同构,从此即知 $\bar{i}_*$ 也是满同构. ▌

注　如上述定理中条件,当 $L_1\supset K-L_2$,则 $K-L_1\subset L_2$.令 M 是 $K-L_1$ 中的开复形,则有 $L_1=K-M$ 和 $L=L_1\cap L_2=(K-M)\cap L_2=K\cap L_2-M\cap L_2=L_2-M$;因此我们得出切除定理的另一种形式:

定理　设 L_2 是 K 的闭子复形,且 M 是L_2 的开子复形,则对每个维数 p,

$H_p(K-M,L_2-M)\cong H_p(K,L_2)$ ▌

这定理表明在复形偶(K,L)中，对$|L|$的内部切除一个子集，其相对同调群不受影响。

§3 复形偶的同调序列

设复形偶(K,L)的最高维数是n，与包含映射$i:|L|\to|K|$相应的链映射记为$i_p:C_p(L)\to C_p(K)$，而与包含映射$j:(|K|,\emptyset)\to(|K|,|L|)$相应的链映射记为商映射$j_p:C_p(K)\to C_p(K,L)$，由$j_p(c_p)=c_p+C_p(L)$，$c_p\in C_p(K)$所确定；因此对所有的$0\leqslant p\leqslant n$，我们有短正合序列

$$0\to C_p(L)\xrightarrow{i_p}C_p(K)\xrightarrow{j_p}C_p(K,L)\to 0$$

设i诱导的诸同态$i_{*p}:H_p(L)\to H_p(K)$；而j诱导的诸同态$j_{*p}:H_p(K)\to H_p(K,L)$（诸$j_{*p}$也称为**限制同态**）. 根据§1，存在着连接同态$\Delta_p:H_p(K,L)\to H_{p-1}(L)$，它的对应确定如下：

设$\bar{z}_p=z_p+C_p(L)\in Z_p(K,L)$，此中$z_p\in C_p(K)$，$\partial z_p\in C_{p-1}(L)$，$\bar{z}$的相对同调类记为$[\bar{z}]$，由于$\partial z_p\in Z_{p-1}(L)$，我们令$\Delta_p([\bar{z}_p])=[\partial z_p]$，我们将指出$[\partial z]$与$\bar{z}_p$的代表$z_p$的选择无关，而且当$\bar{z}$是相对边缘链时$[\partial z]=0$. 事实上，设$z'\in\bar{z}$，即$z'=z+c$，$c\in C_p(L)$，则$\partial z'=\partial z+\partial c$，$\partial c\in B_{p-1}(L)$，因此$[\partial z']$与$[\partial z]$是$H_{p-1}(L)$中同一成员。特当$\bar{z}\in B_p(K,L)$，则存在$d\in C_{p+1}(K)$，$d'\in C_p(L)$使得$z=\partial d+d'$，因此$[\partial z]=[\partial d']=0$，即$H_{p-1}(L)$的零元素. 因此$\Delta_p$是单同态。

由§1的定理，我们得出如下：

定义　设 K 为 n 维复形，$L\subset K$，我们称下面诸同调群和同态的序列

$$0\to H_n(L)\xrightarrow{i_{*n}}H_n(K)\xrightarrow{j_{*n}}H_n(K,L)\xrightarrow{\Delta_n}H_{n-1}(L)\to\cdots$$

$$\to H_p(L)\xrightarrow{i_{*p}}H_p(K)\xrightarrow{j_{*p}}H_p(K,L)\xrightarrow{\Delta_p}H_{p-1}(L)\to\cdots$$

$$\xrightarrow{\Delta_1}H_0(L)\xrightarrow{i_{*0}}H_0(K)\xrightarrow{j_{*0}}H(K,L)\to 0$$

是复形偶(K,L)的**同调序列**

定理　复形偶(K,L)的同调序列是正合的

证明　由§1的定理，立即得出结论，因为本定理无非是§1定理中的一种特殊链复形．注意这时复形 K 的维数是 n，因此序列是有限的．我们在此再作出部分的证明．

因为单纯复形的维数 $p\geqslant 0$，所以 j_{*0}以后诸同调群为零群．现在考察 $\mathrm{Im}\,j_{*0}$，对 $H_0(K,L)$的任一成员$\{\bar z_0\}=\{z_0+C_0(L)\}$，其中 $z_0\in C_0(K)=Z_0(K)$．从而有 $j_{*0}(\{z_0\})=\{j_0(z_0)\}=\{z_0+C_0(L)\}=\{\bar z_0\}$，因此 j_{*0}是满射．其次看 $\ker i_{*n}$，由于 K 的单形最高维数是 n，不存在$(n+1)$维链，所以 i_{*0}的核是零链．关于序列的正合性，应该证明 $\mathrm{Im}\,i_*=\ker j_*$，$\mathrm{Im}\,j_*=\ker\Delta$，以及 $\mathrm{Im}\Delta=\ker i_*$．其中每一个等式成立须证明两个包含关系，例如证明 $\mathrm{Im}\,i_*=\ker j_*$，应该证明 $\mathrm{Im}\,i_*\subset\ker j_*$ 和 $\ker j_*\subset\mathrm{Im}\,i_*$．对其余两个等式也同理加以证明．在此作出部分证明供参考．

(i) $\mathrm{Im}\,i_{*p}\subset\ker j_{*p}$：设 $i_{*p}(\{z_p\})$是 $\mathrm{Im}\,i_{*p}$的任一个成员，其中$\{z_p\}\in H_p(L)$．由于 $z_p\in Z_p(L)$，这时 $j_{*p}i_{*p}(\{z_p\})=\{z_p+C_p(L)\}=\{C_p(L)\}$，它是 $H_p(K,L)$的零元素，所以包含关系成立．

(ii) $\ker j_{*p}\subset\mathrm{Im}\,i_{*p}$：设$\{z_p\}\in H_p(K)$是 $\ker j_{*p}$的成员，即 $j_{*p}(\{z_p\})=0$，表示 $j(z_p)=z_p+C_p(L)$是相对边缘链，因此存在

$c\in C_{p+1}(K)$使得$z_p-\partial c\in C_p(L)$. 因为z_p和∂c都是K的闭链，所以$z_p-\partial c$是K的闭链而且落在$C_p(L)$中，因此$z_p-\partial c\in Z_p(L)$. 表明$z_p-\partial c$既是$H_p(K)$又是$H_p(L)$的成员；而z_p与$z_p-\partial c$在K上是同调的，所以得出$i_{*p}([z_p-\partial c])=[z_p-\partial c]=[z_p]$，包含关系成立.

(iii) $\mathrm{Im}\, j_{*p}\subset\ker\Delta_p$：设$j_{*p}([z_p])=[z_p+C_p(L)]$是$\mathrm{Im}\, j_{*p}$的任一成员，$z_p\in Z_p(K)$，$\partial z_p=0$. 于是$\Delta_p j_{*p}([z_p])=\Delta_p([z_p+C_p(L)])=[\partial z]=0$，即$\mathrm{Im}\, j_{*p}\subset\ker\Delta_p$.

(iv) $\ker\Delta_p\subset\mathrm{Im}\, j_{*p}$：设$[\bar z_p]=[z_p+C_p(L)]\in\ker\Delta_p$，则$\Delta_p([\bar z_p])=[\partial z_p]=0$，亦即$\partial z_p$是$H_{p-1}(L)$的零元素，表明存在$c\in C_p(L)$使$\partial z_p=\partial c$. 从$\partial(z_p-c)=0$表明$z_p-c$是$K$的闭链，它是$H_p(K)$的成员$[z_p-c]$而且满足$j_{*p}([z_p-c])=[z_p-c+C_p(L)]=[z_p+C_p(L)]=[\bar z_p]$，即$[\bar z_p]\in\mathrm{Im}\, j_{*p}$. 从而包含关系成立.

其余让读者自加补足.

例1 设$K=Cl\sigma^n(n\geqslant 2)$，$L=Bd\sigma^n$，此中$\sigma^n$是$n$维单形，计算$H_p(K,L)$.

由于$n\geqslant 2$，所以K与L具相同的0维和1维链. 因此$H_0(K,L)=H_1(K,L)=0$. 对$p>1$，由同调序列

$$\cdots\to H_p(K)\xrightarrow{j_{*p}}H_p(K,L)\xrightarrow{\Delta_p}H_{p-1}(L)\xrightarrow{i_{*p-1}}H_{p-1}(K)\to\cdots$$

因为$H_{p-1}(K)=H_p(K)=0$，从上面序列得出

$$H_p(K,L)\cong H_{p-1}(L).$$

因为L与S^{n-1}同胚，所以

$$H_p(K,L)\cong H_{p-1}(S^{n-1})\cong\begin{cases}\mathbf{Z}, & p=n;\\ 0, & p\neq n.\end{cases}$$

例2　设 K 是两个 n 维球面在一点相切的三角剖分所构成的单纯复形，即两个 $(n+1)$ 维单形 σ_1^{n+1} 和 σ_2^{n+1} 的边缘复形，而 L 是 σ_1^{n+1} 的 n 维骨架 $Bd\ \sigma_1^{n+1}$，计算 $H_n(K)$。

我们考虑 (K,L) 的部分同调序列

$$H_{n+1}(K,L)\xrightarrow{\Delta_{n+1}}H_n(L)\xrightarrow{i_{*n}}H_n(K)\xrightarrow{j_{*n}}H_n(K,L)\xrightarrow{\Delta_n}H_{n-1}(L)\quad(1)$$

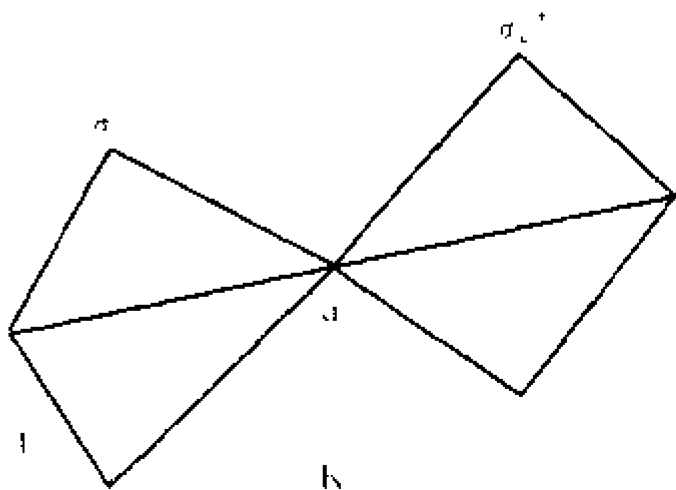


图 4 1

如图 4 1 所示，这时的切除定理有

$H_n(K,L)\cong H_n(Bd\ \sigma_2^{n+1},a)$，此中 $a=L\cap\sigma_2^{n+1}$。由于 $H_{n+1}(K,L)=0$，而且从复形偶 $(Bd\ \sigma_2^{n+1},a)$ 的部分同调序列 $H_n(a)\xrightarrow{i_{*n}}H_n(Bd\ \sigma_2^{n+1})\xrightarrow{j_{*n}}H_n(Bd\ \sigma_2^{n+1},a)\xrightarrow{\Delta_n}H_{n-1}(a)$，对 $n>1$，两端都是平凡的，因此有

$$H_n(Bd\ \sigma_2^{n+1},a)\cong H_n(Bd\ \sigma_2^{n+1})\cong \mathbf{Z}.$$

从此得出　$H_n(K,L)\cong\mathbf{Z}$

另方面，$\Delta_n:H_n(K,L)\to H_{n-1}(L)$ 是零同态。对 $n=1$，由例 1，$H_1(Bd\ \sigma_2^{n+1},a)\cong\mathbf{Z}$。因为 $i_{*0}:H_0(L)\to H_0(K)$ 是同构，

$\mathrm{Im}\Delta_1=\ker i_{*0}=0$，因此 $H_1(K,L)\to H_0(L)$ 也是零同态. 从此，对 $n>0$，序列(1)的部分化为

$$0\xrightarrow{\Delta}H_n(L)\xrightarrow{i_{*n}}H_n(K)\xrightarrow{j_{*n}}H_n(K,L)\xrightarrow{\Delta}0$$

由正合序列的性质，我们有 $H_n(K)\cong H_n(L)\oplus H_n(K,L)$，因为 $H_n(L)\cong H_n(S^n)\cong\mathbf{Z}$，所以 $H_n(K)\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

$$H_p(K)\cong\begin{cases}\mathbf{Z}, & p=0;\\ 0, & 0<p<n \text{ 或 } p>n\end{cases}$$

定理 设复形偶(K,L)和(K',L')对每个 p，链群的短正合序列之间的诸链群同态 α、β、γ 都是链映射，而且下面图表中每个方块都是可交换的：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & C_p(L) & \xrightarrow{i_p} & C_p(K) & \xrightarrow{j_p} & C_p(K,L) & \to 0\\
 & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & \\
0\to & C_p(L') & \xrightarrow{i'_p} & C_p(K') & \xrightarrow{j'_p} & C_p'(K',L') & \to 0
\end{array}$$

则相应的下列同调序列的图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to & H_p(L) & \xrightarrow{i_{*p}} & H_p(K) & \xrightarrow{j_{*p}} & H_p(K,L) & \xrightarrow{\Delta_p} & H_{p-1}(L) & \xrightarrow{i_{*p-1}}\cdots\\
 & \alpha_*\downarrow & & \beta_*\downarrow & & \gamma_*\downarrow & & \alpha_*\downarrow & \\
\cdots\to & H_p(L') & \xrightarrow{i'_{*p}} & H_p(K') & \xrightarrow{j'_{*p}} & H_p(K',L') & \xrightarrow{\Delta'_p} & H_{p-1}(L') & \xrightarrow{i'_*}\cdots
\end{array}$$

其中每个方块也是可交换的. 此中 α_*、β_*、γ_* 是诱导同态，而 Δ，Δ' 是相应的连接同态

证明 因为在链的层次上可交换性质成立，对闭链和边缘链也具有相应的可交换性，所以同调序列图表中的前面两个方块的交换性是显明的. 剩下的是证明后一个方块的可交换性.

设$[e_p]\in H_p(K,L)$，选取 d_p 使得 $j_p(d_p)=e_p$，从 Δ 的定义，

$\Delta([e_p])=[c_{p-1}]$，此中$[c_{p-1}]\in H_{p-1}(L)$. 现设$e_p{}'=\gamma(e_p)$，我们要证明$\Delta'([e_p{}'])=\alpha_*[c_{p-1}]$. 因为$j'\beta(d_p)=\gamma(e_p)=e_p{}'$，所以$\beta(d_p)$是$e_p{}'$在$j'$之下的拉回链. 由于$i'\alpha(c_{p-1})=\beta i(c_{p-1})=\beta(\partial d_p)=\partial'\beta(d_p)$，于是$\alpha(c_{p-1})$是$\partial'\beta(d_p)$在$i'$之下的拉回链. 由定义，$\Delta'([e'_p])=[\alpha(c_{p-1})]$ ▌.

为了给出定理中的同调序列诸方块的可交换性的作用，先介绍下面的一个重要的引理：

引理　(Steenrod的五引理)对于给定的诸交换群A_i, B_i和同态f_i：$(i=1,2,3,4,5)$同态α_j, β_j $(j=1,2,3,4)$；在下面的可交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

中，两个水平序列是正合的；如果f_1、f_2、f_4、f_5都是同构，则f_3也是同构.

证明　先证明f_3是单射. 设$a_3\in A_3$, $f_3(a_3)=0$. 我们必须证明$a_3=0$. 为此，从$f_4\alpha_3(a_3)=\beta_3f_3(a_3)=\beta_3(0)=0$，$f_4$是同构. 所以$\alpha_3(a_3)=0$, $a_3\in\ker\alpha_3=\operatorname{Im}\alpha_2$，因此存在$a_2\in A_2$使$\alpha_2(a_2)=a_3$. 然而$\beta_2f_2(a_2)=f_3\alpha_2(a_2)=f_3(a_3)=0$，所以$f_2(a_2)\in\ker\beta_2=\operatorname{Im}\beta_1$，于是存在$b_1\in B_1$使$\beta_1(b_1)=f_2(a_2)$，由于$f_1$是同构，存在$a_1\in A_1$使$f_1(a_1)=b_1$，这时有$f_2\alpha_1(a_1)=\beta_1f_1(a_1)=f_2(a_2)$. 因为$f_2$是同构，所以$\alpha_1(a_1)=a_2$，于是$\alpha_2(a_2)=\alpha_2\alpha_1(a_1)=0$，即$a_3=0$.

以类似方法验证f_3也是满射，即当$b_3\in B_3$，则存在$a_3\in A_3$使得$f_3(a_3)=b_3$. 留给读者完成其证明过程 ▌

定理　设$h:(K,L)\to(K',L')$是复形偶的单纯映射，则从(L,K)的正合同调序列到(K',L')的正合同调序列的诱导h_*是

个同态,即下面图表每个方块是可交换的

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\to H_p(L) & \xrightarrow{i_*} & H_p(K) & \xrightarrow{j_*} & H_p(K,L) & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(L) & \xrightarrow{i_*} & H_{p-1}(K) & \xrightarrow{j_*} & \cdots \\
\downarrow h_{*p} & & \downarrow h_{*p} & & \downarrow h_{*p} & & \downarrow h_{*p-1} & & \downarrow h_{*p-1} & & \\
\cdots\to H_p(L') & \xrightarrow{i'_*} & H_p(K') & \xrightarrow{j'_*} & H_p(K',L') & \xrightarrow{\Delta'} & H_{p-1}(L') & \xrightarrow{i'_*} & H_{p-1}(K') & \xrightarrow{j'_*} & \cdots
\end{array} \qquad (1)$$

如果 $h_*: H_i(K)\to H_i(K')$ 和 $h_*: H_i(L)\to H_i(L')$ $(i=p, p-1)$ 都是同构,则 $h_{*p}: H_p(K,L)\to H_p(K',L')$ 也是同构.

证明 由于链映射 h 在下面图表中每个方块具可交换性,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & C_p(L) & \xrightarrow{i} & C_p(K) & \xrightarrow{j} & C_p(K,L) & \to 0 \\
& \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & \\
0\to & C_p(L') & \xrightarrow{i'} & C_p(K') & \xrightarrow{j'} & C_p(K',L') & \to 0
\end{array}$$

从相应的长同调序列(1)的每个方块具可交换性. 根据上面的五引理,则定理中诸结论得到证明 ▌

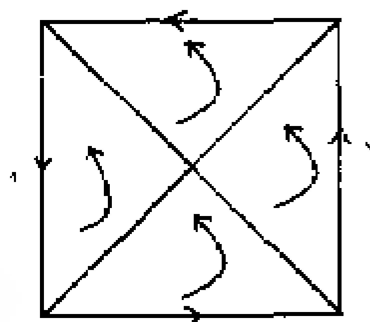


图 4-2

例 如图 4-2 所示, K 是一个 2 维单形,而 L 是正方形边界为底空间的子复形,根据复形偶的正合同调序列的一段

$$H_2(K)\xrightarrow{j_*}H_2(K,L)\xrightarrow{\Delta}H_1(L)\xrightarrow{i_*}H_1(K),$$

因为 $|K|$ 可缩,所以 $H_1(K)=0$,

$H_2(K)=(0)$,而 $H_1(L)$ 是由 1 维链 $s_1+s_2+s_3+s_4$ 生成的无限循环群;因此 $H_2(K,L)\cong H_1(L)\cong Z$.

§4　Mayer－Vietoris 序列

我们在这一节介绍的 Mayer－Vietoris 序列，它显示两复形的并与交的同调群之间的关系．设 K 是两个子复形 K_1 与 K_2 的并，而且交 $K_1\cap K_2$ 是非空子复形．下面的序列就是所谓 Mayer－Vietoris 序列

$$\cdots\xrightarrow{s_*}H_{p+1}(K_1\cup K_2)\xrightarrow{v_*}H_p(K_1\cap K_2)\xrightarrow{j_*}H_p(K_1)\oplus H_p(K_2)\xrightarrow{s_*}H_p(K_1\cup K_2)\xrightarrow{v_*}\cdots$$

首先说明诸链群的映射 j，s 和 v 的定义：令 j 是 $C_p(K_1\cap K_2)$ 到直和 $C_p(K_1)\oplus C_p(K_2)$ 的链映射，定义为 $j(c_p)=(c_p,-c_p)$，$c_p\in C_p(K_1\cap K_2)$．因此 j 是 $C_p(K_1\cap K_2)$ 到 $C_p(K_1)$ 的内射以及到 $C_p(K_2)$ 的负内射，j 诱导出 $H_p(K_1\cap K_2)$ 到 $H_p(K_1)\oplus H_p(K_2)$ 的同态 j_{*p}．注意到当 j 是到内的同构，但 j_* 不一定是同构．

其次，$C_p(K_1)\oplus H_p(K_2)$ 到 $C_p(K_1\cup K_2)$ 的链映射 s，是

$$s(c_p^1,c_p^2)=c_p^1+c_p^2,\ c_p^i\in C_p(K_i)\ (i=1,2)$$

链映射 s 诱导出 $H_p(K_1)\oplus H_p(K_2)$ 到 $H_p(K_1\cup K_2)$ 的同态 s_{*p}，这时 $H_p(K_1)\oplus H_p(K_2)$ 的非零元素可能映为 $H_p(K_1\cup K_2)$ 的零元素，这是因为当一个在 K_i $(i=1$ 或 $2)$ 的闭链不是边缘链，而在 $K_1\cup K_2$ 可能是边缘链．

最后说明 v_* 的构作．设 $c_p\in C_p(K_1\cup K_2)$，这蕴涵着它可写为 $c_p=c_p^1+c_p^2$，$c_p^i\in C_p(K_i)$ $(i=1,2)$，而这些链 c_p^i 只由模 $K_1\cap K_2$ 所决定，意思是当 $c_p^1-k_p^1=c_p^2-k_p^2=d_p$，此 d_p 是 $K_1\cap$

K_2 中的 p 维链，$k_p\in C_p(K_i, K_1\cap K_2)$，则 $c_p^1+c_p^2=k_p^1+k_p^2$。这蕴涵着 $C_p(K_1\cup K_2, K_1\cap K_2)$ 与 $C_p(K_1, K_1\cap K_2)\oplus C_p(K_2, K_1\cap K_2)$ 同构。现设 $z_p\in Z_p(K_1\cup K_2)$，记 $z_p=z_p^1+z_p^2$，$z_p^i\in C_p(K_i)$ $(i=1,2)$。因此从 $\partial z_p^1+\partial z_p^2=0$ 得出 $\partial z_p^1=-\partial z_p^2$，左右方两个链应属于 $Z_{p-1}(K_1\cap K_2)$。由于 z_p^1 由模 $C_p(K_1\cap K_2)$ 所决定，因此闭链 ∂z_p^1 由模 $B_{p-1}(K_1\cap K_2)$ 所决定，因此可以直接由 $v_*([z_p])=[\partial z_p^1]$ 决定之。当在 $K=K_1\cup K_2$ 上，$z_p\sim z_p'$，则在 $K_1\cap K_2$ 上，$\partial z_p\sim\partial z_p'$。这是由于当 $z_p-z_p'=\partial t_{p+1}$，记 $t_{p+1}=t_{p+1}^1+t_{p+1}^2$，$z_p=z_p^1+z_p^2$，$z_p'=z_p'^1+z_p'^2$。因此 $z_p^1+z_p^2=z_p'^1+z_p'^2+\partial t_{p+1}^1+\partial t_{p+1}^2$。于是有关系式

$z_p^1=z_p'^1+\partial t_{p+1}^1+d_p^1$，$z_p^2=z_p'^2+\partial t_{p+1}^2-d_p^2$；其中 d_p^1 和 d_p^2 是 $K_1\cap K_2$ 中的 p 维链。这表明 $z_p^1-z_p'^1$ 蕴涵着在 $K_1\cap K_2$ 上，$\partial z_p^1\sim\partial z_p'^1$。因此对应 v_* 是完全确定的。此外，容易验证 v_* 是同态。

定理　Mayer-Vietoris 序列是正合的。

证明　我们必须证明：(i) ker s_* = Im j_*；(ii) ker v_* = Im s_*；(iii) ker j_* = Im v_*。

(i) 设 $d_p\in C_p(K_1\cap K_2)$，$j(d_p)=(d_p,-d_p)$，于是 $s(d_p,-d_p)=d_p-d_p=0$，因此 $j(d_p)\in$ ker s_*，从而有 Im $j_*\subset$ ker s_*。另一方面，设 $(c_p^1,c_p^2)\in C_p(K_1)\oplus C_p(K_2)$ 满足 $s(c_p^1,c_p^2)=c_p^1+c_p^2=0$，则 $c_p^1=-c_p^2$。由于 $c_p^i\in C_p(K_i)$ $(i=1,2)$，所以 c_p^i $(i=1,2)$ 只能在 $K_1\cap K_2$ 中，从此有 $j(c_p^1)=(c_p^1,-c_p^1)=(c_p^1,c_p^2)$。因此 ker $s_*\subset$ Im j_*，证明了 ker s_* = Im j_*。

(ii) 设 (z_p^1,z_p^2) 是 $H_p(K_1)\oplus H_p(K_2)$ 中一个成员的代表，则

$s(z_p^1, z_p^2) = z_p^1 + z_p^2$ 是 $K_1 \cup K_2$ 上的闭链. 根据定义, $v_*([z_p^1 + z_p^2]) = [\partial z_p^1]$. 然而 $z_p^1 \in Z_p(K_1)$, 所以在 K_1 上, $\partial z_p^1 = 0$; 在 K_2 上, $\partial z_p^1 = -\partial z_p^2 = 0$, 因此在 $K_1 \cap K_2$ 上, $\partial z_p^1 = 0$ 也成立. 这表明 $\mathrm{Im}\, s_* \subset \ker v_*$. 反之, 设 z_p 表示 $K_1 \cup K_2$ 上的闭链满足 $v_*([z_p]) = 0$, 根据定义, 我们有分解式 $z_p = z_p^1 + z_p^2$, 其中 $z_p^i \in K_i$ $(i = 1,2)$, 使得 $v_*([z_p]) = v_*([z_p^1 + z_p^2]) = [\partial z_p^1]$, 由于 $\partial z_p = 0$, $\partial z_p^1 + \partial z_p^2 = 0$ 或 $\partial z_p^1 = -\partial z_p^2$. 由假定, 在 $K_1 \cap K_2$ 上有一个链, 它是 z_p^1 和 z_p^2 两者的边缘. 这表明 z_p^1 与 z_p^2 分别是 K_1 和 K_2 上的闭链. 因此 (z_p^1, z_p^2) 代表 $H_p(K_1) \oplus H_p(K_2)$ 的某个成员, 即 $s(z_p^1, z_p^2) = z_p^1 + z_p^2 = z_p$. 因而有 $\ker v_* \subset \mathrm{Im}\, s_*$.

(iii) 设 z_p 是 $K_1 \cap K_2$ 上的闭链使得 $j(z_p)$ 同调于零, 即在 K_1 和 K_2 上都有 $z_p \sim 0$. 于是在 K_1 和 K_2 上分别存在 $p+1$ 维链 z_{p+1}^1 和 z_{p+2}^2 使得 $z_p = \partial c_{p+1}^1 = \partial c_{p+1}^2$. 现在考察 $K_1 \cup K_2$ 上的链 $z_{p+1} = c_{p+1}^1 - c_{p+1}^2$, 显然它是 $K_1 \cup K_2$ 上的闭链. 于是 $v_*([z_{p+1}]) = v_*([c_{p+1}^1 - c_{p+1}^2]) = [\partial c_{p+1}^1] = [z_p]$. 证明了 $\ker j_* \subset \mathrm{Im}\, v_*$. 反之, 设 z_p 是同调成员 $v_*([z_{p+1}])$ 的一个代表, 假设 $z_{p+1} = z_{p+1}^1 + z_{p+1}^2$, 则 $z_p = \partial z_{p+1}^1 + \partial d_{p+1}$, 此中 $d_{p+1} \in C_{p+1}(K_1 \cap K_2)$. 由于 $\partial z_{p+1} = \partial z_{p+1}^1 + \partial z_{p+1}^2 = 0$, 我们有 $\partial z_{p+1}^1 = -\partial z_{p+1}^2$. 因此也有 $z_p = -\partial z_{p+1}^2 + \partial d_{p+1}^2$, 此中 ∂d_{p+1}^2 也是 $K_1 \cap K_2$ 中的链. 因此 $z_p = \partial(z_{p+1}^1 + d_{p+1}^1)$ 在 K_1 上同调于零, 而且 $z_p = \partial(-z_{p+1}^2 + d_{p+1}^2)$ 在 K_2 上同调于零, 这蕴涵着 $j(z_p) = (z_p, -z_p)$ 同调于零. 因此 $\mathrm{Im}\, v_* \subset \ker j_*$. ∎

例 利用 Mayer-Vietoris 序列证明 S^n 的诸同调群为

$$H_p(S^n) \simeq \begin{cases} Z, & p = 0, n (\neq 0); \\ 0, & p \neq 0, n. \end{cases}$$

证明　设$X_1 = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in S^n \mid x_n > -\frac{1}{2}\}$

$X_2 = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in S^n \mid x_n < \frac{1}{2}\}$，

则$S^n = X_1 \cup X_2$，而$X_1 \cap X_2$与S^{n-1}同伦等价，X_1与X_2都与单点空间同伦等价．因此有

$$H_p(X_i) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases} (i = 1,2), \quad H_p(X_1 \cap X_2) \simeq H_p(S^{n-1}).$$

(i)当$n = 0$，则S^0为两个单点，因此

$$H_p(S^0) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}$$

(ii)当$n = 1, p = 1$时；考察Mayer-Vitoris部分序列

$$H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{s_*} H_1(S^1) \xrightarrow{v_*} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{j_*} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$$

或即$0 \xrightarrow{s_*} H_1(S^1) \xrightarrow{v_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$

由于$H_0(X_1 \cap X_2) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$的两个母元素在$j_*$之下的像都是$H_0(X_i)$的母元素，因此对$(\lambda, \mu) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$，$j_*(\lambda, \mu) = (\lambda + \mu, \lambda + \mu)$．从$Im\ v_* = \ker j_* = \{(\lambda, -\lambda) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\} \simeq \mathbf{Z}$．因此从$\ker v_* = Im\ s_* = 0$得出$v_*$是单同态，因此$H_1(S^1) \simeq \mathbf{Z}$．

对$p > 1$，从部分序列

$$H_p(X_1) \oplus H_p(X_2) \xrightarrow{s_*} H_p(S^1) \xrightarrow{v_*} H_{p-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(X_1) \oplus H_{p-1}(X_2)$$

这时化为$0 \xrightarrow{s_*} H_p(S^1) \xrightarrow{v_*} 0 \xrightarrow{j_*} 0$，因此$H_p(S^1) = 0$．

(iii)当$n > 1$利用归纳法，假设结论对$n - 1$成立，考虑S^n的情况：

当$p = 1$，考察部分序列

$$H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{s_*} H_1(S^n) \xrightarrow{v_*} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{j_*} H_0(X_1) \oplus H(X_2)$$

这时化为 $0 \xrightarrow{s_*} H_1(S^n) \xrightarrow{\partial_*} Z \xrightarrow{j_*} Z\oplus Z$. 因为 $H_0(X_1\cap X_2)\cong Z$ 的母元素在 j_* 之下的像是 $H_0(X_i)$ 的母元素，因此对 $\lambda\in Z$, $j_*(\lambda)=(\lambda,\lambda)$，从而有 $\operatorname{Im}\partial_*=\ker j_*=0$，又 $\ker\partial_*=\operatorname{Im}s_*=0$，所以 $H_1(S^n)=0$

对 $p>1$，考察部分序列

$$H_p(X_1)\oplus H_p(X_2)\xrightarrow{s_*}H_p(S^n)\xrightarrow{\partial_*}H_{p-1}(X_1\cap X_2)\xrightarrow{j_*}H_{p-1}(X_1)\oplus H_{p-1}(X_2)$$

或即 $0\xrightarrow{s_*}H_p(S^n)\xrightarrow{\partial_*}H_{p-1}(S^{n-1})\xrightarrow{j_*}0$，所以

$$H_p(S^n)\cong H_{p-1}(S^{n-1})$$

根据归纳假设，$H_{p-1}(S^{n-1})\cong\begin{cases}Z, & p-1=0, n-1\\ 0, & p-1\neq 0, n-1\end{cases}$

因此得出　$H_p(S^n)\cong\begin{cases}Z, & p=n\\ 0, & p\neq 0, n\end{cases}$ ∎

例　作为 Mayer-Vietoris 序列的一个应用，验证

$$H_n(S^n)\cong Z\quad(n\geq 1)$$

证明　在 $n+1$ 维欧氏空间 R^{n+1} 中的 $n+1$ 个点 $(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1,0)$ 决定超平面 $x_{n+1}=0$ 上一个 n 维单形 σ^n，σ^n 的边缘复形是 S^{n-1} 的一个三角部分，设 $v_+=(0,\cdots,0,1)$，$v_-=(0,\cdots,0,-1)$ 我们构作两个锥面复形 $K_1=v_+S^{n-1}$ 和 $K_2=v_-S^{n-1}$，这时 $K_1\cap K_2=S^{n-1}$，建立相应的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots\to H_n(K_1)\oplus H_n(K_2)\xrightarrow{s_*}H_n(S^n)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(K_1\cap K_2)$$
$$\xrightarrow{j_*}H_{n-1}(K_1)\oplus H_{n-1}(K_2)\xrightarrow{s_*}\cdots$$

由于 K_1 与 K_2 的同调群是平凡的，因此对 $n>1$，我们有满同构 ∂_* ∎

习 题

1 证明下列有关正合序列的一些基本性质(其中诸英文字母表示交换群,0 表示平凡群):

(i) $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \to 0$ 是正合的,当且仅当 φ 是满同态;

(ii) $0 \to A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2$ 是正合的,当且仅当 φ 是单同态;

(iii) $0 \to A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \to 0$ 是正合的,则 $A_2/\varphi(A_1)$ 经过 ψ 诱导的与 A_3 是同构的;

(iv) 设序列 $A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{\varphi} A_3 \xrightarrow{\beta} A_4$ 正合,则下列诸命题等价:(1)α 是满同态,(2)β 是单同态,(3)φ 是零同态.

(v) 设序列 $A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \to A_3 \to A_4 \xrightarrow{\beta} A_5$ 正合,则诱导序列

$0 \to \operatorname{coker} \alpha \to A_3 \to \ker \beta \to 0$ 是正合的;此中 $\operatorname{coker} \alpha = A_2/\alpha(A_1)$.

2 如果短正合序列 $0 \to A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \to 0$ 中,$\varphi(A_1)$是 A_2 的一个直接加项,则称该序列是**分裂的**,于是该序列化为 $0 \to A_1 \xrightarrow{\varphi} \varphi(A_1) \oplus B \xrightarrow{\psi} A_3 \to 0$,其中 φ 是A_1 与 $\varphi(A_1)$的同构,而 ψ 是 B 到 A_3 的一个同构.证明下列诸条件是等价的:(1)序列是分裂的;(2)有一个同态 $p: A_2 \to A_1$ 使 $p \circ \varphi = i_{A_1}$;(3)有一个同态 $j: A_3 \to A_2$ 使 $\psi \circ j = i_{A_3}$.

3 证明§1 的定理中,长同调序列(8)是正合的.

4 证明§1 的命题.

5. 验证§2 开头所定义的∂_p 满足$\partial_p \circ \partial_p = 0$.

6. 设 $f:(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$是连续的,证明 f_{*p}: $H_p(K_1, L_1)\to H_p(K_2, L_2)$是同态.

7. 证明§2的命题中诸性质(i)—(iii).

8. 证明复形偶(K, L)的同调序列的正合性中,$\mathrm{Im}\Delta = \ker i_*$.

9. 证明:在五引理中,当 f_1, f_2, f_4, f_5 是同构,则 f_3 是满射.

第五章　补充知识

§1　奇异同调群

第三章所引进的单纯同调群的概念,仅对可剖分空间有意义.本节介绍的奇异同调群,对任意的拓扑空间都有意义,而且它的拓扑不变性则是很显然的.对可剖分空间而言,则它的两种同调群是同构的.为避免繁冗,我们不给出它的证明.

定义　设 $\boldsymbol{R}^{n+1}$为 $n+1$ 维欧氏空间,其坐标向量的顺序分别记为 $e_0,e_1,\cdots,e_n$;则点集

$\Delta_n=\{x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid x=\sum\limits_{i=0}^{n}x_ie_i,\ x_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{i=0}^{n}x_i=1,\ 0\leqslant i\leqslant n\}$称为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的**标准 n 维单形**;其中 e_i 是第 i 个坐标为1,而其余坐标为零的点,Δ_n 的子集 $\Delta_n(i)$表示 Δ_n 中第 i 个坐标为0的点集;即 $\Delta_n(i)=\{x\in\Delta_n\mid x_i=0\}$,称为 Δ_n 的**第 i 个面或第 i**

个顶点所对的面. 映射 $d_i:\Delta_{n-1}\to\Delta_n$ 由

$$d_i(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})=(x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots,x_{n-1})$$

所确定者, 称为**第 i 个包含映射**, 因此第 i 个包含映射 d_i 是将标准 $n-1$ 维单形 Δ_{n-1} 线性同胚地映为标准 n 维单形 Δ_n 的第 i 个面. d_i 也称为第 i 个**面算子**.

引理 1　对下列诸包含映射

$$\begin{aligned}&\Delta_{n-2}\xrightarrow{d_j}\Delta_{n-1}\xrightarrow{d_i}\Delta_n,\\&\Delta_{n-2}\xrightarrow{d_{i-1}}\Delta_{n-1}\xrightarrow{d_j}\Delta_n;\end{aligned}\qquad (j<i)$$

则有 $d_id_j=d_jd_{i-1}$.

证明　读者自加验证. ▌

定义　设 X 为任意的拓扑空间, 则任意的连续映射 $s^n:\Delta_n\to X(n\geqslant 0)$ 称为 X 中的一个**奇异 n 维单形**. X 中所有的奇异 n 维单形的集合记为 $S_n(X)$. 对 $n>0$ 且 $0\leqslant i\leqslant n$, 复合映射 $s_i^n=s^nd_i:\Delta_{n-1}\to X$ 是奇异 $(n-1)$ 维单形, 称为奇异 n 单形 s^n **的第 i 个面**. 集合 $S(X)=\bigcup_{n=0}^{\infty}S_n(X)$ 以及诸 $S_n(X)$ 上的面算子族 $\{d_i,0\leqslant i\leqslant n\}$ 一起, 称为 X 的**奇异复形**.

这里要介绍 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中一种特殊的奇异 n 维单形. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的有序点列, 则映射 $l:\Delta_n\to\mathbf{R}^{n+1}$ 定义为: 对 $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)\in\Delta_n$, 在 l 之下的对应元素为 $l(a_0,\cdots,a_n)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_ia_i\in\mathbf{R}^{n+1}$, 它把顶点 e_i 映为 a_i, 称为**线性奇异 n 维单形**. 当值域 $\mathbf{R}^{n+1}$ 换为一般拓扑空间, 定义仍然有效. 对于线性奇异 p 单形 $l(a_0,\cdots,a_p)$, 则 $ld_j:\Delta_{p-1}\to l(a_0,\cdots,\hat{a}_j,\cdots,a_p)$. 其中∧号表示去掉所指的一点.

定义　拓扑空间 X 上的一个**奇异 $p(\geqslant 0)$ 维链** c_p 是整系数的

有限个奇异 p 维单形的线性组合.形式上可写为 $c_p=\sum_{i=1}^{r} g_i{}^{(i)}s^p$，$g_i\in \mathbf{Z}$. 此中 ${}^{(i)}s^p$ 是 p 维奇异单形.

一个奇异 p 维链也可看为一个函数 $c_p: S_p(X)\to \mathbf{Z}$，它除了对有限个奇异 p 维单形 ${}^{(i)}s^p(i=1,\cdots,r)$ 取值分别为 $g_i\in \mathbf{Z}$ 外，对其余奇异 p 单形均取零值.

在由整数诱导的点态加法运算之下，设 $c_p=\sum_{i=1}^{r} g_i{}^{(i)}s^p$，$c_p'=\sum_{i=1}^{r} g_i'{}^{(i)}s^p$，则定义 c_p 与 c_p' 的和为 $c_p+c_p'=\sum_{i=1}^{r}(g_i+g_i')^{(i)}s^p$. X 上全体奇异 p 维链 $\{c_p\}$ 构成一个加法群 $C_p(X)$，它称为 X 的**奇异 p 维链群**.

引理 2 设 s^n 是 X 中的奇异 $n(>1)$ 维单形，则

$$s^n_{i,j}=s^n_{j,i-1}, \quad 0\leqslant j<i\leqslant n.$$

此中 $s^n_{i,j}$ 表示奇异 $(n-1)$ 维单形 s^n_i 的第 j 个面.

证明 由引理 1，$s^n_{i,j}=s^n_i d_j=s^n d_i d_j=s^n d_j d_{i-1}=s^n_j d_{i-1}=s^n_{j,i-1}$. ∎

定义 对一个只由一个奇异 p 单形构成的基本奇异 p 维链 $g s^p(p\geqslant 1)$，定义**边缘算子** ∂ 为

$$\partial(g s^p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i g s^p_i,$$

通过线性扩充为奇异链群 $C_p(X)$ 到 $C_{p-1}(X)$ 的同态，记为 ∂_p，该映射 ∂ 称为**奇异 p 维边缘同态**，即

$$\partial: C_p(X)\to C_{p-1}(X).$$

对每个奇异零维链，定义它的边缘为零.

定理 在空间 X 中，下列运算的合成

$$C_p(X)\xrightarrow{\partial_p}C_{p-1}(X)\xrightarrow{\partial_{p-1}}C_{p-2}(X),$$

即 $\quad \partial_{p-1}\partial_p: C_p(X)\to C_{p-2}(X)\quad (p\geqslant 2)$

是平凡同态，亦即$\partial_{p-1}\partial_p = 0$.

证明　只须对一个基本奇异 p 维链 $g\,s^p$ 证明满足$\partial_{p-1}\partial_p(g\,s^p) = 0$ 即可. 而任一奇异 p 维链乃基本链的线性组合.

$$\partial_{p-1}\partial_p(g\,s^p) = \partial_{p-1}\Big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i g\,s_i^p\Big) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\Big(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j g\cdot s_{i,j}^p\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{i+j} g\,s_{i,j}^p = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant p}(-1)^{i+j} g\,s_{i,j}^p + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant p-1}(-1)^{i+j} g\,s_{i,j}^p$$

$$= \sum_{0\leqslant j<i\leqslant p}(-1)^{i+j} g\,s_{j,i-1}^p + \sum_{0\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j-1} g\,s_{i,j-1}^p,$$

将最后一行第一个和式中 $i-1$ 换为 j，j 换为 i，则两个和式抵消. ▌

定义　对空间 X 和整数 $p>0$，奇异 p 维链 z_p 满足$\partial_p z^p = 0$，则称 z_p 是 X 上的一个**奇异 p 维闭链**. 奇异 p 维闭链的集合是同态$\partial_p: C_p(X)\to C_p(X)$的核，它是 $C_p(X)$的子解，称为 X 的**奇异 p 维闭链群**，记为 $Z_p(X)$. 定义奇异零维闭链为奇异零链，因此 $Z_0(X) = C_0(X)$. 当 $p\geqslant 0$，对奇异 p 维链 b_p，如果存在奇异$(p+1)$维链 c_{p+1}使得$\partial_{p+1}(c_{p+1}) = b_p$，则称 b_p 是一个**奇异 p 维边缘链**. 奇异 p 维边缘链的集合是同态$\partial_{p+1}: C_{p+1}(X)\to C_p(X)$的像，而且从引理 2，它还是 $Z_p(X)$的子群，称为**奇异 p 维边缘链群**，记为 $B_p(X)$ $(p\geqslant 0)$. 商群 $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$称为 X 的**奇异 p 维同调群**.

定义　对拓扑空间 X 与 Y 以及连续映射 $f: X\to Y$，设 $s^p\in S_p(X)$，则合成映射 $f\,s^p\in S_p(Y)$. 因此 f 诱导出一个同态 $f_p: C_p(X)\to C_p(Y)$定义为对$\sum_{i=0}^{r} g_i\,{}^{(i)}s^p\in C_p(X)$，$f_p\big(\sum_{i=0}^{r} g_i\,{}^{(i)}s^p\big) = \sum_{i=0}^{r} g_i f({}^{(i)}s^p)$. f_p 称为 f 诱导的 p **维链映射**.

引理 3　下列图表是可交换的：

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{f_p} & C_p(Y) \\ \Big\downarrow{\partial_p} & & \Big\downarrow{\partial_p} \\ C_{p-1}(X) & \xrightarrow{f_{p-1}} & C_{p-1}(Y) \end{array}$$

即 $\partial_{p-1} f_p = f_{p-1}\partial_p$

证明 只须对任一基本奇异 p 维链 $g\,s^p \in C_p(X)$ 加以证明即可. 事实上,

$$\partial_{p-1} f_p(g\,s^p) = g\partial_{p-1} f_p(s^p) = g\sum_{j=0}^{p}(-1)^j (f_p s^p)_{(j)}$$

$$= g\sum_{j=0}^{p}(-1)^j (f_p s^p) d_j = g\sum_{j=0}^{p}(-1)^j f_{p-1}(s^p d_j)$$

$$= f_{p-1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j g\, s_j^p = f_{p-1}\partial_p(g\,s^p). \ ∎$$

根据上述引理 3, 链映射 $f_p(p\geqslant 0)$ 与边缘同态可交换. 从此得知 f_p 将 X 的奇异 p 维闭链映到 Y 的奇异 p 维闭链, 而且 f_p 把 X 的奇异 p 维边缘链映为 Y 的奇异 p 维边缘链, 从此 f_p 诱导出 X 的奇异 p 维同调群与 Y 的奇异 p 维同调群的**诱导同态** $f_{*p}: H_p(X)\to H_p(Y)$, 它定义为 $f_{*p}(z_p + B_p(X)) = f_p(z_p) + B_p(Y)$, $z_p + B_p(X)\in H_p(X)$.

定理 设 $i: X\to X$ 是恒同映射, 则 $i_{*p}: H_p(X)\to H_p(X)$ 是恒同同态; 设 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 都是连续映射, 则 $(g\circ f)_{*p} = g_{*p}\circ f_{*p}: H_p(X)\to H_p(Z)$.

证明 在链的层次上, $i(s^p) = i_p s^p$, 而且 $(g\circ f)_p(s^p) = g_p\circ(f_p s^p) = g_p\circ f_p(s^p)$ 对一切 $s^p\in C_p(X)$ 成立. 因为 i_p, f_p, g_p 都是链映射, 因此它们的诱导同态 i_{*p}, f_{*p}, g_{*p} 满足定理的结论. ∎

推论 设 $h: X\to Y$ 是同胚, 则 h_* 是同构. ∎

从此看出奇异同调群的拓扑不变性是很简单的结论, 对于单纯同

调群，其拓扑不变性的证明则相当繁冗. 下面介绍特殊的空间的奇异同调群，对于一般拓扑空间的奇异同调群的计算，则须引进其他概念，本书不再加以讨论.

命题　设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是空间 X 的道路连通分支的集体，则 $H_p(X)\cong\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}H_p(X_\alpha)$，$p\geqslant 0$；其中$\bigoplus$表示直和运算.

证明　因为标准单形 Δ_p 是道路连通的，对任意的奇异 p 维单形 $s^p:\Delta_p\to X$，因为 s^p 连续，所以像 $s^p(\Delta_p)$在 X 中必定是道路连通的，因此它落在 X 的某个道路连通分支 X_α 中，而且 s^p 的面 $s^{p-1}=s^pd_i$ 与 s^p 是同一个道路连通分支 X_α 中的奇异单形；因此 $Z_p(X)=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}Z_p(X_\alpha)$，$B_p(X)=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}B_p(X_\alpha)$，而且由于 $B_p(X_\alpha)\subset Z_p(X_\alpha)(\alpha\in\Gamma)$，根据交换群的有关命题，则有 $H_p(X)=Z_p(X)/B_p(X)\cong\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}(Z_p(X_\alpha)/B_p(X_\alpha))=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}H_p(X_\alpha)$.
▌

对于奇异零维链，它必定是奇异闭链. 当奇异零维链 $c_0\sim 0$，则存在奇异 1 维链 $c_1=\sum_{i=1}^{r}g_i{}^{(i)}s^1\in C_1(X)$，使得$\partial_1c_1=c_0$，亦即 $c_0=\sum_{i=1}^{r}g_i\partial_1{}^{(i)}s^1$，而每个${}^{(i)}s^1$的边缘$\partial_1{}^{(i)}s^1=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j{}^{(i)}s^1d_j={}^{(i)}s^1d_0-{}^{(i)}s^1d_1$，其中${}^{(i)}s^1d_j$ 都是奇异零维单形，它们的系数和等于零. 因此，当 $c_0=\partial_1c_1$，即当零维链是边缘链，则系数之和必为零. 从此引出下面的概念：

定义　同态 $\varepsilon:C_0(X)\to\mathbf{Z}$ 定义为，对 $c_0=\sum_{i=0}^{r}g_i{}^{(i)}s^0$，$\varepsilon c_0=\varepsilon(\sum_{i=0}^{r}g_i{}^{(i)}s^0)=\sum_{i=0}^{r}g_i$. 我们称 ε 为**奇异增广同态**.

因此我们有增广的链群同态序列　$\cdots\to C_1(X)\xrightarrow{\partial_1}C_0(X)$

$\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{Z}$. 我们定义 $\widetilde{H}_0(X)=\ker\varepsilon/\operatorname{Im}\partial_1$ 为**约化奇异零维同调群**.

显然,对 $p>0$, $\widetilde{H}_p(X)=\ker\partial_p/\operatorname{Im}\partial_{p+1}=H_p(X)=Z_p(X)/B_p(X)$.

注 上述的增广同态和约化同调群的概念在单纯同调论中同样可以引进.

定理 设 X 是道路连通的,则 $B_0(X)=\ker\varepsilon$.

证明 从定义,显然有 $B_0(X)\subset\ker\varepsilon$. 当 X 是道路连通的,设 $c_0\in\ker\varepsilon$,则当 $c_0=\sum_{i=1}^{r}g_i{}^{(i)}s^0$, $g_i\in\mathbf{Z}$,而且 $\sum_{i=1}^{r}g_i=0$. 于是对每个 i,存在 X 中的一个奇异 1 维单形 c_i^1 使得 $\partial c_i^1=s^0-{}^{(i)}s^0$. 因此 $c_0\sim c_0+\partial(\sum_{i=1}^{r}g_ic_i^1)=c_0+\sum_{i=1}^{r}g_i(s^0-{}^{(i)}s^0)=\sum_{i=1}^{r}g_i{}^{(i)}s^0+\sum_{i=1}^{r}g_is^0-\sum_{i=1}^{r}g_i{}^{(i)}s^0$,前后两项消去,中间一项由条件 $\sum_{i=1}^{r}g_i=0$ 亦为零,因而 $c_0\sim0$,即 $c_0\in B_0(X)$. 从此 $B_0(X)=\ker\varepsilon$.

从定理,当 X 道路连通,则 $\widetilde{H}_0(X)=\ker\varepsilon/\operatorname{Im}\partial_1=B_0(X)/B_0(X)=0$. 从 $C_1(X)\xrightarrow{\partial_1}C_0(X)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{Z}$,由于 ε 是满射,根据交换群的同态基本定理,$H_0(X)=Z_0(X)/B_0(X)=C_0(K)/\ker\varepsilon\cong\operatorname{Im}\varepsilon\simeq\mathbf{Z}$. ▌

定义 当空间 X 的各维约化奇异同调群为零,即 $\widetilde{H}_p(X)=0$ $(p\geqslant0)$,则称 X 是**零调的**.

定理 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是空间 X 的道路连通分支的集体;则 $H_0(X)$ 是一个自由交换群,它的基的个数是 Γ.

证明 对每个 $\alpha\in\Gamma$. 设 s_α^0 是一个奇异零维单形,它的像在 X_α 中,而 s^0 是 X 的任一个奇异零维单形,则有一条从 s^0 到 s_α^0

的道路 $f:[0,1]\to X_\alpha\subset X$. 于是 f 是奇异1维链满足 $\partial f=s_\alpha^0-s^0$. 因此 X 上任一条奇异零维链必同调于 $\sum_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha s_\alpha^0$ 的链，其中 $g_\alpha\in\mathbf{Z}$, $s_\alpha^0\in S_0(X_\alpha)$. 我们要指出，不存在奇异维链 c^1，使得它的边缘取形式 $\partial c^1=\sum_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha s_\alpha^0$. 这是因为 c^1 的每个奇异1维单形是一条道路，它的像必落在某个道路连通分支 X_α 中，因此 $c^1=\sum_{\alpha\in\Gamma}c_\alpha^1$，此中 c_α^1 由 X_α 所承载；所以 ∂c_α 也落在 X_α 中，从而对每个 α，如果 $g_\alpha s_\alpha^0=\partial c_\alpha^1$，两边取同态 ε，因为 $\varepsilon(\partial c_\alpha^1)=0$，从而得出 $g_\alpha=0$. 因此 $H_0(X)$ 同构于由 $\{s_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为基所构成的自由交换群，即
$H_0(X)\cong\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}\mathbf{Z}$ ∎

定理　设 P_0 是单点空间，则

$$H_p(P)\cong\begin{cases}\mathbf{Z}, & p=0\\ 0, & p\neq 0\end{cases}$$

证明　对 $p\geqslant 0$, $s^p:\Delta_p\to\{P_0\}$ 只有唯一的常值映射 e_p，因此对一切正整数 n, $S_n(P_0)$ 是 $\{s^n\}=\{e_{p_0}\}$ 生成的自由群，它与 $\mathbf{Z}$ 同构. 而 $\partial s^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i^{n}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_{p_0}=\begin{cases}0, & 当 n 是奇数或零\\ e_{p_0}, & 当 n 是偶数\end{cases}$. 对 $n>0$, $Z_n(P_0)=B_n(P_0)$, 所以 $H_n(P_0)=0(n>0)$. 而 $Z_0(P_0)=S_0(P_0)\cong\mathbf{Z}$, $B_0(P_0)=0$, 所以 $H_0(P_0)\cong\mathbf{Z}$. ∎

在第三章§2曾计算复形 K 上的锥形 vK 的同调群，在此也有相应的结论，为此先引进一个概念.

一个集合 $A\subset X$，满足条件：$v\in A$，如果对 A 中任一点 $x\neq v$，则 x 到 v 的线段包含在 A 中，则称 A 相对于点 v 是**星形凸的**.

现设 X 相对于 $v\in X$ 是星形凸的，$s^p:\Delta_p\to X$ 是拓扑空间 X

的一个奇异 p 维单形，定义一个奇异 $(p+1)$ 维单形 $[s^p, v]: \Delta_{p+1} \to X$，它满足下述条件：当 $x \in \Delta_p$，则 $[s^p, v]$ 将 x 到 $\boldsymbol{R}^n$ 中第 $p+1$ 个坐标向量 $e_{p+1} \in \Delta_{p+1}$ 的线段线性地映满从 $s^p(x)$ 到 v 的线段。以这样的定义线性地扩充到任意 p 维链，即对 $c_p = \sum g_i{}^{(i)} s^p$ 是 X 中一个奇异 p 维链，令 $[c_p, v] = \sum_i g_i [{}^{(i)} s^p, v]$。从此可知映射 $[s^p, v]|_{\Delta_p \subset \Delta_{p+1}} = s^p$。当 s^p 是线性奇异单形 $l(a_0 \cdots a_p)$ 时，则 $[s^p, v]$ 为线性奇异 $(p+1)$ 维单形 $l(a_0 \cdots a_p v)$。我们还须验证映射 $[s^p, v]$ 的连续性。为此，定义 $\pi: \Delta_p \times I \to \Delta_{p+1}$ 为 $\pi(x, t) = (1-t)x + te_{p+1}$，此中 $x \in \Delta_p$，$t \in I$，e_{p+1} 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中第 $(p+1)$ 个坐标向量的端点。则 π 将 $\Delta_p \times 1$ 映为 e_{p+1}，而其余的处处是一对一的。π 是商映射，它诱导出一个从 Δ_{p+1} 到 X 的连续映射，将线段 $x \times I$ 线性地映为 x 到 e_{p+1} 的线段上去。然而映射 $f(x, t) = (1-t)s^p + tv$ 是连续的，它在 $\Delta_p \times 1$ 上取常值 v，而将 $x \times I (x \in s^p)$ 线性地映为从 $s^p(x)$ 到 v 的线段上。因此这个 f 诱导出的映射即原来定义的 $\Delta_{p+1} \to X$ 的奇异单形 $[s^p, v]$。证明了 $[s^p, v]$ 是连续的。

引理 设 X 相对于 $v \in X$ 是星形凸的，c_p 是 X 的一个奇异 p 维链，则

$$\partial[c^p, v] = \begin{cases} [\partial c_p, v] + (-1)^{p+1} c_p, & p > 0 \\ \varepsilon(c_p) s_v{}^0 - c_p, & p = 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中 $s_v{}^0$ 是将 Δ_0 映为点 v 的特殊奇异零维单形。

证明 当 $p = 0$，则对奇异零维单形 s^0，$[s^0, v]$ 将 Δ_1 线性地映为 $s^0(\Delta_0)$ 到 v 的线段。因此 $\partial[s^0, v] = s_v{}^0 - s^0$。对 $c^0 = \sum_i g_i{}^{(i)} s^0$，则 $\partial[c^0, v] = \sum_i g_i s_v^0 - \sum_i g_i{}^{(i)} s^0 = \varepsilon(c^0) s_v{}^0 - c_0$，式(1)的第二式成立。

对 $p>0$,图 5 1 表示直观上 p 1 时式(1)的第 式成立

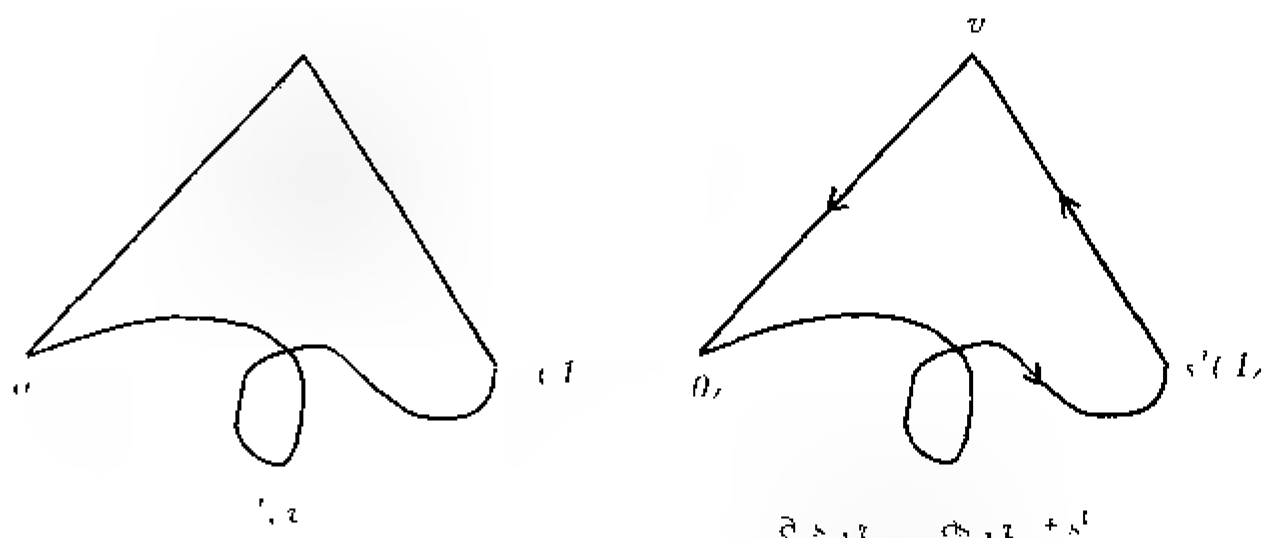


图 5 1

从∂的定义,

$$\partial[s^p, v] = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\partial[s^p, v]\cdot d_j \tag{2}$$

其中 $d_j:\Delta_p \to \Delta_{p+1}$定义为 $d_j(x_0\cdots x_p)=(x_0\cdots x_{j-1},0,x_j,\cdots x_p)$.式(2)中 d_{p+1}是 Δ_p 到 Δ_{p+1}的内射 而$[s^p, v]$限制在 Δ_p 上等于 s^p,因此式(2)最后一项等于$(-1)^{p+1}s^p$.对于$j<p+1$的情况,d_j同胚地将Δ_p 映为Δ_{p+1}的第 j 个面去,它分别把坐标向量 $e_0,\cdots,e_p$ 映到$e_0,\cdots,e_{j-1},e_{j+1},\cdots,e_{p+1}$去 因此 $d_j|_{\Delta_{p-1}}$将 Δ_{p-1}线性地映到由 $e_0,\cdots,e_{j-1},e_{j+1},\cdots,e_p$ 所张成的单形上去.因此 $d_j|_{\Delta_p}=s^p(e_0\cdots\hat{e}_j\cdots e_p)$. 对 $x\in\Delta_{p-1}$,因为 $d_j:\Delta_p\to\Delta_{p+1}$是线性映射,它把 x 到e_p 的线段映为从$d_j(x)$到 e_{p+1}的线段 由于$d_j(x)\in\Delta_p$,$[s^p, v]:\Delta p+1\to X$ 又将该线段映为 $s^pd_j(x)$到 v 的线段 因此$[s^p, v]\circ d_j = [s^p\circ(d_j|_{\Delta_{p-1}}), v]$,从而

$$\begin{aligned}\partial[s^p, v] &= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i[s^p\circ(d_i|_{\Delta_p}), v] \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[s^p\circ(d_i|_{\Delta_p}), v] + (-1)^{p+1}s^p \\ &= [\partial s^p, v] + (-1)^{p+1}s^p\end{aligned}$$ ▎

定理　设 X 相对于一点 v 是星形凸的，则 X 在奇异同调中是零调的.

证明　当 $p>0$，设 $z\in Z_p(X)$，由引理，

$$\partial[z, v] = [\partial z, v] + (-1)^{p+1}z = (-1)^{p+1}z,$$

表示 z 是某个 $(p+1)$ 维链 $[z, v]$ 的边缘，因此 $H^p(X)=0$.

对 $p=0$，设 c^0 是 X 中任一零维链而且满足 $\varepsilon(c^0)=0$. 根据引理，$\partial[c^0, v] = \varepsilon(c^0)s_v^0 - c^0 = -c^0$，因此 c^0 是一维链 $[c_0, v]$ 的边缘，所以 $\widetilde{H}_0(X)=0$ ▎

由于任意单形对其中任一点都是星形凸的，因此我们得到

推论　在奇异同调中，任意单形都是零调的. ▎

从第三章及本章在前面介绍的内容，不难看出单纯同调群和奇异同调群，特别是在它们的代数结构方面，有许多类似的概念和结论. 我们有下面的概念

定义　设 $\{C_p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ 是一族交换群，$\{\partial_p: C_p\to C_{p-1}\}_{p\in\mathbf{Z}}$ 是一族同态满足 $\partial_p\circ\partial_{p+1}=0$，则它们组成的集体 $C=\{C_p, \partial_p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ 称为一个**链复形**.

这时 C_p 称为链复形的 p 维链群，而 $\ker\partial_p = Z_p(C)$ 及 $\operatorname{Im}\partial_{p+1} = B_p(C)$ 分别称为链复形 C 的 p-闭链群和 p-边缘链群，由于 $\partial_p\circ\partial_{p+1}=0$，因此可定义商群 $\ker\partial_p/\operatorname{Im}\partial_{p+1} = Z_p(C)/B_p(C) = H_p(C)$，它称为**链复形** C **的** p-**同调群**；其成员称为链复形

C 的 p-同调类.

例　设 K 为单纯复形,则 $\{C_p(K),\partial_p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ 是一个链复形,称为单纯链复形,它所导出的同调群 $H_p(K)$ 称为 p 维单纯同调群.

设 X 为拓扑空间,则 $\{C_p(X),\partial_p\}$,此中 $C_p(X)$ 表示 X 上的奇异 p 维链群,它也是一个链复形,称为奇异链复形;相应的 $H_p(X)$ 称为 p 维奇异同调群.

例　设 X 为拓扑空间,令

$$\tilde{C}_p(X)=\begin{cases}C_p(X), & p\geqslant 0\\ \mathbf{Z}, & p=-1\end{cases},\qquad \tilde{\partial}_p=\begin{cases}\partial_p, & p\neq 0\\ \varepsilon, & p=0\end{cases}$$

此中 $\varepsilon:C_0(X)\to\mathbf{Z}$ 是增广同态,$\tilde{C}_{-1}(X)=\mathbf{Z}$ 和 $\tilde{\partial}_0=\varepsilon$ 是从序列 $C_1(X)\to C_0(X)$ 再形式地添加上去的.因此 $\{\tilde{C}_p(X),\tilde{\partial}_p\}$ 也是一个链复形,称为**增广奇异链复形**.从 $\partial_p\partial_{p+1}=0(p>0)$ 及 $\varepsilon\partial_1=0$ 导出的同调群 $\tilde{H}_p(X)$ 称为**约化奇异同调群**.于是 $\tilde{H}_p(X)=H_p(X)$,$p>0$,而 $\tilde{H}_0(X)\oplus\mathbf{Z}=H_0(X)$.

注　当 K 为单纯复形,同样可引进增广单纯复形以及约化单纯同调群等概念.

定义　对两个不同的链复形 $C=\{C_p,\partial_p\}$ 和 $C'=\{C_p',\partial_p'\}$,如果存在一族同态 $f=\{f_p:C_p\to C_p'\}$ 使得 $\partial_p'\circ f_p=f_{p-1}\circ\partial_p$,则称 f 是链复形 C 到 C' 的**链映射**.

例　设 f 是拓扑空间 X 到 Y 的连续映射,则 $f=\{f_p:C_p(X)\to C_p(Y)\}$ 是链映射,称为**奇异链映射**.

当定义 $\tilde{f}_p=f_p(p\neq -1)$,$\tilde{f}_p=1_{\mathbf{Z}}(p=-1)$,则 $\tilde{f}=\{\tilde{f}_p\}$ 也是

链映射,称为由连续映射 f 诱导的**增广奇异链映射**.

定义 当 $f=\{f_p\}$ 是链复形 C 到 C' 的链映射,则由 $f_{*p}(z_*)=[f_p(z)]$, $[z]\in H_p(C)$ 所定义的 $f_{*p}:H_p(C)\to H_p(C')$ 称为链映射 f 诱导的链复形同调群的同态.

不难验证,对恒同链映射 $1_C:C\to C$,则 $(1_C)_{*p}:H_p(C)\to H_p(C)$ 是恒同同态.

而当 $f:C\to C'$ 和 $g:C'\to C''$ 都是链映射,则 $g\circ f:C\to C''$ 也是链映射,而且 $(g\circ f)_{*p}=g_{*p}\circ f_{*p}:H_p(C)\to H_p(C'')$.

最后,再引进链同伦的概念,它是证明奇异同调群是同伦不变量所必需的.

定义 设 $f,g:C\to C'$ 是两个链映射,如果存在一族同态 $D=\{D_p:C_p\to C'_{p+1}\}$ 使得(参考下面图表)

$$\partial'_{p+1}D_p+D_{p-1}\partial_p=g_p-f_p,\quad p\in\mathbf{Z},$$

则称 f 与 g 是**链同伦的**,D 称为 f 到 g 的**链同伦**,记为 $f\underset{D}{\simeq}g:C\to C'$,或简记为 $f\simeq g$.

$$\begin{array}{ccc} & C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} & \\ {\scriptstyle D_p}\swarrow & {\scriptstyle g_p}\ \ {\scriptstyle f_p}\searrow & \swarrow{\scriptstyle D_p} \\ C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} C'_p & \end{array}$$

从定义不难验证下面的命题.

命题 1 若 $f\simeq g:C\to C'$,则 $f_{*p}=g_{*p}:H_p(C)\to H_p(C')$. ∎

命题 2 设 $f,g,h:C\to C'$ 都是链映射,则有

(i)$f\simeq f$;(ii)若 $f\simeq g$,则 $g\simeq f$;(iii)若 $f\simeq g$, $g\simeq h$,则 $f\simeq h$.

证明 (i)平凡的链同伦 0 就是从 f 到自身的链同伦;(ii)设 D 是从 f 到 g 的链同伦,则 $-D$ 即从 g 到 f 的链同伦;(iii)若 D,

D'分别是f到g和g到h的链同伦，则$D+D'$就是f到h的链同伦 ∎

定义　如果链映射$f: C\to C'$，$g: C'\to C$满足$g\circ f\simeq 1_C$，$f\circ g\simeq 1_{C'}$，则称f与g是**链同伦等价的**，也称C链同伦等价于C'，记为$C\simeq C'$，这时g也称为f的**链同伦逆**.

链同伦等价是链复形的等价性关系．而且当$f: C\simeq C'$，则$f_{*p}: H_p(C)\cong H_p(C')$.

最后，我们要证明奇异同调群也是同伦不变量，即证明当$f\simeq g: X\to Y$，则它们所诱导的链映射是链同伦等价的，即$f\simeq g: C_p(X)\to C_p(Y)$．为此我们在此引进一个概念.

定义　设$(a_0\cdots a_p)$是$\boldsymbol{R}^n$中p维单形，在$\boldsymbol{R}^{n+1}$取I与$\boldsymbol{R}^n$正交，作$(a_0\cdots a_p)$上的柱形$(a_0\cdots a_p)\times I$，当以a_i表示下底的点$(a_i,0)$，b_i表示上底的点$(a_i,1)$，$(i=0,1,\cdots,p)$．定义$\boldsymbol{R}^{n+1}$上的线性奇异单形$l(a_0\cdots a_p)$的**柱形链**$P: l(a_0\cdots a_p)\to l(a_0\cdots a_p)\times I$为

$$Pl(a_0\cdots a_p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k l(a_0\cdots a_k b_k\cdots b_p),$$

并对线性奇异单形的线性组合作线性扩充，则柱形链P即p维链到$(p+1)$维链的映射.

现在取标准奇异单形$\Delta_p: l(e_0\cdots e_p)$，为方便起见，记$\Delta_p\times I$的点$(e_i,0)$为$x_i$，$(e_i,1)$的点为$y_i$ $(i=0,1,\cdots,p)$，并规定顺序为$x_0<x_1<\cdots<x_p<y_0<y_1<\cdots<y_p$．则

$$P(I)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k l(x_0\cdots x_k y_k\cdots y_p).$$

引理　对给定的$p\geq 0$，则

$$\partial\circ P(I)=l(y_0y_1\cdots y_p)-l(x_0x_1\cdots x_p)-P\circ\partial_I.$$

证明 $\partial\circ P(l)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\partial l(x_0\cdots x_ky_k\cdots y_p)=$

$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j l(x_0\cdots\hat{x}_j\cdots x_ky_k\cdots y_p)+\sum_{j=k}^{p}(-1)^{j+1}l(x_0\cdots x_ky_k\cdots\hat{y}_j\cdots y_p)]=\sum_{0\leqslant j<k\leqslant p}(-1)^{j+k}l(x_0\cdots\hat{x}_j\cdots x_ky_k\cdots y_p)+\sum_{0\leqslant k<j\leqslant p}(-1)^{j+k+1}l(x_0\cdots x_ky_k\cdots\hat{y}_j\cdots y_p)+\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(-1)^k l(x_0\cdots x_{k-1}y_k\cdots y_p)+\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(-1)^{k+1}l(x_0\cdots x_ky_{k+1}\cdots y_p)$

最后的等式的第一、第二和式合并即 $-P\circ\partial l$；而第三个和式的头一项即 $l(y_0\cdots y_p)$，第四个和式最后一项即 $l(x_0\cdots x_p)$，而第二、四两和式其余各项两两消去，因此得到

$\partial\circ P(l)=l(y_0\cdots y_p)-l(x_0\cdots x_p)-P\circ\partial l$. ∎

引理 对 $0\leqslant i\leqslant p$,

$$(d_i\times 1_I)\circ P(l_{p-1})=Pl(e_0\cdots\hat{e}_i\cdots e_p)$$

式中 $(d_i\times 1_I)$ 表示 $\Delta_{p-1}\times I\to\Delta_p\times I$ 诱导的链映射.

证明 $(d_i\times 1_I)\circ P(l_{p-1})=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k(d_i\times 1_I)l(x_0\cdots x_ky_k\cdots y_{p-1})=\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k l(x_0\cdots x_ky_k\cdots\hat{y}_i\cdots y_p)+\sum_{k=i}^{p-1}(-1)^k l(x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_{k+1}y_{k+1}\cdots y_p)=Pl(e_0\cdots\hat{e}_i\cdots e_p)$. ∎

当 $f\simeq g:X\to Y$，即存在 $F:X\times I\to Y$ 满足 $F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=g(x)$，$x\in X$. 于是对任意的奇异 p 单形 $s^p\in S_p(X)$，定义 $D_p(s^p)=F_\#(s^p\times 1_I)\circ P(l_p)$，此中 $F_\#$ 和 $s^p\times 1_I$ 分别表示 $s^p\times 1_I:\Delta^p\times I\to X\times I$，和 $F:X\times I\to Y$ 诱导的链映射，经过线性扩充得出同态

$$D_p:C_p(X)\to C_{p+1}(Y),\quad p\geqslant 0.$$

对 $p<0$ 定义 $D_p=0$ 从此得出柱形链同伦

$D = \{D_p\}_{p\in Z}: C(X)\to C(Y)$

定理　设 $f\sim g: X\to Y$. 则 $f\sim g: C(X)\to C(Y)$

证明　只须验证对任意的奇异 p 单形 $s^p\in S_p(X)$, 满足 $\partial Ds^p + D\circ\partial s^p = gs^p - fs^p, p\in Z$

事实上, 当 $p<0$, 上式显然成立. 对 $p\geqslant 0$,

$\partial Ds^p + D\circ\partial s^p = \partial\circ F\circ(s^p\times 1_I)\circ P(l_p) + D\sum(-1)^i s^p d_i$

$= F\circ(s^p\times 1_I)(l(y_0\cdots y_p) - l(x_0\cdots x_p) - P\circ\partial l_p) +$

$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i F\circ(s^p d_i\times 1_I)\circ Pl_p$

$= gs^p - fs^p - F\circ(s^p\times 1_I)\circ p\circ\partial l_p + F\circ(s^p\times 1_I)(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i Pl(e_0\cdots\hat{e}_i\cdots e_p))$

$= gs^p - fs^p$ ▌

定理　如果 $f\sim g: X\to Y$, 则 $f_* = g_*: H_*(X)\to H_*(Y)$

从上述定理及命题 1 立即得出定理的证明. ▌

定理　设 f 是 X 与 Y 的链同伦等价, 则

$$f_*: H_*(X)\simeq H_*(Y)$$

证明　当 X 与 Y 同伦等价, 则存在 f 的同伦逆 g 使得 $g\circ f\sim 1_X$, $f\circ g\sim 1_Y$ 从它们诱导的链映射得出 $(g\circ f)_* = g_* f_* = 1_{X*}$, $(f\circ g)_* = f_* g_* = 1_{Y*}$, 因此 f_* 是满单射. 即 $f_*: H_*(X)\simeq H_*(Y)$. ▌

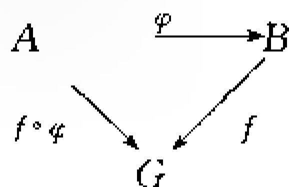
§2　上同调

先简述一些预备知识.

对交换群 A 和 G, 如果同态 $f, g: A\to G$, 对任意的 $a\in A$,

$f(a)\in G$, $g(a)\in G$, 定义 $f+g$ 为 $(f+g)(a)=f(a)+g(a)\in G$. 因此同态的集合，f 在这种点态加法之下也构成一个交换群，称为同态的交换群，也记为Hom(A,G).

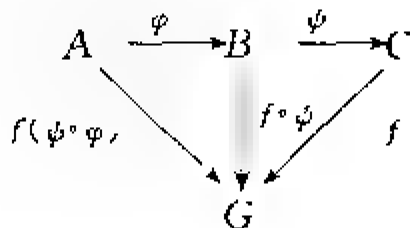
设 $\varphi: A\to B$ 是交换群的同态，如下图解所示，设 $f\in \mathrm{Hom}(B,G)$，则 $f\circ\varphi\in \mathrm{Hom}(A,G)$



因此同态 φ 诱导出 $f\in\mathrm{Hom}(B,G)$ 到 $f\circ\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)$ 的同态，记为 $\varphi^{\#}$；即 $\varphi^{\#}(f)=f\circ\varphi$：

$$\mathrm{Hom}(A,G)\xleftarrow{\varphi^{\#}}\mathrm{Hom}(B,G)$$

设有同态 $\psi: B\to C$，则有下面图解：



$$\mathrm{Hom}(A,G)\xleftarrow{\varphi^{\#}}\mathrm{Hom}(B,G)\xleftarrow{\psi^{\#}}\mathrm{Hom}(C,G)$$

$$(\psi\circ\varphi)^{\#}=\varphi^{\#}\circ\psi^{\#}$$

定义　现在考虑链复形 $C=\{C_i,\partial_i\}$，它可以是单纯链复形或奇异链复形等等；其中的 C_p 是 p 维链群，它也是交换群. 我们取另一个交换群为整数加群 $\mathbf{Z}$. 定义 $c^p=\mathrm{Hom}(c_p,\mathbf{Z})$，称为 p **维上链**，它可以是单纯上链或奇异上链，看 c_p 是单纯链或奇异链而定. c^p 的全体记为 C^p，称为 p **维上链群**. 对 $x_p\in C_p$, c^p, $d^p\in C^p$，则 $(c^p+d^p)(x_p)=c^p(x_p)+d^p(x_p)\in\mathbf{Z}$

对 p 维边缘同态 $\partial_p: C_p \to C_{p-1}$，定义 p **维上边缘同态** $\delta^p = \partial_p{}^{\#}: C^p \to C^{p+1}$，或即 $\delta^p: \mathrm{Hom}(C_p, \boldsymbol{Z}) \to \mathrm{Hom}(C_{p+1}, \boldsymbol{Z})$ 由上述定义，对 $c^p \in C^p$，$\delta^p c^p$ 是 $(p+1)$ 维上链，它在任意的 $(p+1)$ 维链 $x_{p+1} \in C_{p+1}$ 上取值为 $\delta^p c^p(x_{p+1}) = c^p(\partial_{p+1} x_{p+1})$.

因为 $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$，因此由上述定义

$\delta^{p+1} \circ \delta^p = \partial_{p+1}^{\#} \circ \partial_p^{\#} = (\partial_{p+1} \circ \partial_p)^{\#} = 0$，所以

$\delta^{p+1} \circ \delta^p: C^p \to C^{p+2}$ 是零同态.

因此，$\{C^p, \delta^p\}$ 也是链复形，称为**上链复形**，也记为 C^*

定义 对 p 维上链群 C^p，$\delta^p: C^p \to C^{p+1}$ 的核 $\ker \delta^p$ 称为上链复形 C^* 的 p **维上闭链群**，记为 $Z^p(C^*)$，而 $\delta^{p-1}: C^{p-1} \to C^p$ 的像 $\mathrm{Im}\,\delta^{p-1}$ 称为 C^* 的 p **维上边缘链群**，记为 $B^p(C^*)$ 显然 $B^p(C^*)$ 是 $Z^p(C^*)$ 的子群，商群 $H^p(C^*) = Z^p(C^*)/B^p(C^*)$ 称为 C^* 的 p **维上同调群**

引理1 设 $f = \{f_p: C_p \to D_p\}$ 是链复形 $\{C_p, \partial_p\}$ 到 $\{D_p, \partial_p'\}$ 的链映射，则存在同态 $f^{\#} = \{f^{\#p}: D^p \to C^p\}$，它是相应的上链复形 $\{C^p, \delta^p\}$ 到 $\{D^p, \delta'^p\}$ 的链映射，即满足 $\delta^p f^{\#p} = f^{\#p+1} \delta'^p$.

证明 由于 $f_p: C_p \to D_p$ 是链映射，它满足 $\partial_p' f_p = f_{p-1} \partial_p$ 对 $y^p \in D^p$，$x_{p+1} \in C_{p+1}$，从 δ，$f^{\#}$ 的定义以及 f 是链映射，我们有

$\delta^p f^{\#p}(y^p)(x_{p+1}) = f^{\#p}(y^p)(\partial_{p+1} x_{p+1}) = y^p f_p(\partial_{p+1} x_{p+1}) = y^p \partial'_{p+1} f_{p+1}(x_{p+1}) = \delta'^p y^p f_{p+1}(x_{p+1}) = f^{\#(p+1)}(\delta'^p y^p)(x_{p+1})$，对任意 $x_{p+1} \in C_{p+1}$ 成立. 证明了 $\delta^p f^{\#p} = f^{\#(p+1)} \delta'^p$. ▌

我们称引理中的同态 $f^{\#}$ 为**上链映射**.

上述引理的交换性可表为 $\bar{f}\delta = \delta\bar{f}$，它对于上同调理论的作用正如同交换性 $f\partial = \partial f$ 在同调论中的重要性 当 $\bar{f} = f^{\#}$ 是上链映射，容易验证，这时 $\bar{f}$ 把上链复形 D^* 的上闭链映为 C^* 的上闭链，

而且把 D^* 的上边缘链映为 C^* 的上边缘链. 因此 $f^p = f^{\# p}$ 诱导出 p 维上同调群 $H^p(D^*)$ 到 $H^p(C^*)$ 上的同态, 记为 $f^{* p}: H^p(D, Z) \to H^p(C, Z)$. 它由

$f^{* p}([y^p]) = [f^{\# p} y^p]$, $[y^p] \in H^p(D^*)$ 所决定.

设 $[y^p] \in H^p(D, \mathbf{Z})$, $[z_p] \in H_p(C, \mathbf{Z})$, 则有

$$[y^p] \cdot f_{*p}[z_p] = f^{*p}[y^p] \cdot [z_p].$$

引理 2 设 $f: C \to D$ 和 $g: D \to E$ 都是链复形的链映射, 则合成映射 gf 也是 $C \to E$ 的链映射. 于是相应的上同调群的诱导同态满足关系式 $(gf)^* = f^* g^*$.

留给读者自加验证. ∎

设 f 与 g 是链复形 C 到 C' 的链同伦的链映射, 即存在一族同态 $D = \{D_p: C_p \to C'_{p+1}\}$ 满足对每个 $p \geq 0$, $\partial_{p+1} D_p + D_{p-1} \partial_p = f_p - g_p$. 我们定义伴随同态

$\bar{D} = \{D^p: C'^p \to C^{p-1}\}$ 为对 $c'^p \in C'^p$, $x_{p-1} \in C_{p-1}$,

$D^p c'^p(x_{p-1}) = c'^p D_{p-1}(x_{p-1})$. 我们称 $\bar{D}$ 为上链复形 C'^* 到 C^* 的上链映射 $f^\#$ 与 $g^\#$ 的**上链同伦**.

引理 上链同伦 D^p 满足

$$\delta^{p-1} D^p + D^{p+1} \delta^p = f^{\# p} - g^{\# p},$$

此中, $f^{\# p}$, $g^{\# p}$ 是上链同伦的上链映射 $C'^p \to C^p$.

证明 对 C'^p 上的任一上链 c'^p 和 C^p 的基本链 x_p, 以及 δ^p 和 D^p 的定义, 我们有

$$\delta^{p-1} D^p c'^p(x_p) = D^p c'^p(\partial x_p) = c'^p D_{p-1}(\partial x_p)$$

$$= c'^p(f_p(x_p) - g_p(x_p) - \partial_{p+1} D_p(x_p))$$

$$= f^{\# p} c'^p(x_p) - g^{\# p} c'^p(x_p) - c'^p \partial_{p+1} D_p(x_p)$$

$$= f^{\# p} c'^p(x_p) - g^{\# p} c'^p(x_p) - \delta^p c'^p D_p(x_p)$$

$= f^{\#p}c^{p}(x_p) - g^{\#p}c^{p}(x_p) = D^{p+1}\delta^{p}c^{p}(x_p)$. ▌

从第三章及上述引理，当链映射 f 与 g 同伦，则存在 f 与 g 的链同伦，于是存在相应的上链映射 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}$，它们是同伦的，从引理即知 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}$ 所诱导的 C^* 与 C^* 上各维上同调群是相等的

上同调的一个特点是它具有乘法运算的结构，因此在这种乘法之下具有环的结构，从而成为上同调环．它比起同调论有更丰富的内容，可利用来刻划拓扑空间更多的拓扑性质，我们在此以奇异上同调为基础介绍奇异上同调的环结构　它们的应用见超出本书的范围．

根据奇异标准单形的定义，引进映射 $\lambda_p: \Delta_p \to \Delta_{p+q}$ 为 $(e_0 e \cdots e_p) \xrightarrow{\lambda_p} (e_0 \cdots e_p, \underbrace{0\cdots 0}_{q\text{个零}})$ 而且 $\mu_q: \Delta_q \to \Delta_{p+q}$ 为 $(e_0 e_1 \cdots e_q) \xrightarrow{\mu_q} (\underbrace{0\cdots 0}_{p\text{个零}}, e_p e_{p+1} \cdots, e_{p+q})$.

于是对拓扑空间 X，X 中的奇异 $(p+q)$ 单形 $s: \Delta_{p+q} \to X$，即 $s \in S_{p+q}(X)$，则 $s\lambda_p: \Delta_p \to X$，$s\mu_q: \Delta_q \to X$，所以 $s\lambda_p \in S_p(X)$，$s\mu_q \in S_q(X)$．它们分别是 X 上的奇异 p 单形和奇异 q 单形．通过线性组合构成奇异链 c_p 和 c_q．

定义　设 $c^p \in C^p(X)$，$d^q \in C^q(X)$，定义 $c^p \cup d^q \in C^{p+q}(X)$ 为：对 $s \in S_{p+q}(X)$，

$$(c^p \cup d^q)(s) = (c^p(s\lambda_p)) \cdot (d^q(s\mu_q)) \in Z$$

亦即 c^p 在 $p+q$ 维单形 s 的前 p 个顶点构成的单形取值，而 d^q 在 s 的后 q 个顶点构成的单形取值．我们称 $c^p \cup d^q$ 为上链 c^p 与 d^q 的**上积**

从上述定义，(i)当 c^p 和 d^q 是若干基本链的线性组合，则 c^p

$\cup d^q$ 具双线性质；(ii) 上积具可结合性，即 $(c^p\cup c^q)\cup c^r=c^p\cup(c^q\cup c^r)$；(iii) 上积具单位元 c^0：$c^p\cup c^0=c^p=c^0\cup c^p$，这是由于对奇异单形 $s_0\in S_0(X)$，满足 $c^0(s_0)=1$ 的 $c^0\in \mathrm{Hom}(s_0,Z)$ 是存在的.

命题 $\delta(c^p\cup d^q)=\delta c^p\cup d^q+(-1)^p c^p\cup\delta d^q$，此中 $c^p\in C^p(X)$，$d^q\in C^q(X)$.

证明 对任意的 $s\in C_{p+q+1}(X)$，

$$(\delta c^p\cup d)(s)=(\delta c^p)(s\lambda_{p+1})\cdot(d^q(s\mu_q))=c^p(\partial(s\lambda_{p+1}))\cdot d^q(s\mu_q)$$

$$=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i c^p(s_i\lambda_{p+1})\cdot(d^q(s\mu_q))$$

$$=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i c^p(s_i\lambda_p)\cdot(d^q(s\mu_q))$$

$$+(-1)^{p+1}c^p(s\lambda_p)\cdot d^q(s\mu_q),$$

$$(c^p\cup\delta d^q)(s)=(c^p(s\lambda_p))\cdot(\delta d^q(s\mu_{q+1}))$$

$$=(c^p(s\lambda_p))(d^q(\partial(s\mu_{q+1})))$$

$$=c^p(s\lambda_p)\cdot\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j d^q(s\mu_{q+1}),$$

$$=\sum_{i=p}^{p+q+1}(-1)^{i-p}c^p(s\lambda_p)\cdot d^q(s_i\mu_{q+1})$$

$$=c^p(s\lambda_p)d^q(s\mu_q)$$

$$+(-1)^p\sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i c^p(s\lambda_p)d^q(s_i\mu_q)$$

以第二式乘以 $(-1)^p$ 与第一式相加即得出

$$(\delta c^p\cup d^q+(-1)^p c^p\cup\delta d^q)(s)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i c^p(s_i\lambda_p)\cdot d^q(s_i\mu_q)+$$

$$+\sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i c^p(s\lambda_p)\cdot d^q(s_i\mu_q)$$

$$=\sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i c^p(s_i\lambda_p)\cdot d^q(s_i\mu_q)=c^p\cup d^q(\partial s)$$

$$=\delta(c^p\cup d^q)(s).\ \blacksquare$$

引理　(i) 上闭链∪上闭链=上闭链；

(ii) 上闭链∪上边缘链=上边缘链；

(iii) 上边缘链∪上边缘链=上边缘链.

证明　(i) 当 c^p 与 d^q 都是闭链, 则 $\delta c^p=0$, $\delta d^q=0$ 因此, $\delta(c^p\cup d^q)=\delta c^p\cup d^q+(-1)^p c^p\cup\delta d^q=0\cup d^q+c^p\cup 0=0$;

(ii) 当 $\delta c^p=0$, $\delta e^{q+1}=d^q$, 则有

$c^p\cup d^q=c^p\cup\delta e^{q+1}=(-1)^p\delta(c^p\cup e^{q+1})-(-1)^p\delta c^p\cup e^{q+1}$
$=(-1)^p\delta(c^p\cup e^{q+1})$;

(iii)与(ii)类同 ▌

定理　上同调类的上积与上闭链的代表选择无关.

证明　设 $c^p, c'^p\in Z^p(X)$, 而且 $c'^p-c^p=\delta c^{p-1}$, 即

$[c^p]=[c'^p]\in H^p(X)$. 同理, $d^q, d'^q\in Z^q(X)$, 而且 $d'^q-d^q=\delta d^{q-1}$, 即 $[d^q]=[d'^q]\in H^q(X)$. 则

$$c'^p\cup d'^q=(c^p+\delta c^{p-1})\cup(d^q+\delta d^{q-1})=c^p\cup d^q+c^p\cup\delta d^{q-1}+\delta c^{p-1}\cup d^q+\delta c^{p-1}\cup\delta d^{q-1},$$

根据引理中(ii)和(iii), 则 $c'^p\cup d'^q-c^p\cup d^q$ 是一个 $(p+q)$ 维上边缘链, 所以 $[c'^p\cup c'^q]=[c^p\cup c^q]$. ▌

定义　$\cup: H^p(X)\times H^q(X)\to H^{p+q}(X)$ 定义为 $[z^p]\cup[z^q]=[z^p\cup z^q]$, $[z^p]\in H^p(X)$, $[z^q]\in H^q(X)$.

对 $\sum_{p=0}^{n}[z^p], \sum_{q=0}^{n}[z^q]\in H^*(X)$, $n=\dim X$ 此中 $[z^p]\in H^p(X)$, $[z^q]\in H^q(X)$, 则 $(\sum_{p=0}^{n}[z^p])\cup(\sum_{q=0}^{n}[z^q])=\sum_{p,q=0}^{n}[z^p\cup z^q]$.

因此系统 $(H^*(X),+,\cup)$ 构成一个环, 以 $H^0(X)$ 的元素 $[s^0]=\mathrm{Hom}(s_0,Z)$ 为单位元; 它称为 X **的上同调环**.

设 $f: X\to Y$ 是拓扑空间 X 到 Y 的连续映射, $f^\#$ 是 f 诱导的上链群的同态 $f^\#: C^p(Y)\to C^p(X)$, 它也是链映射. 从此诱导出上

同调群的同态 $f^{*p}: H^p(Y) \to H^p(X)$

命题　上链群的链映射 $f^\#$ 是环同态，即

$$f^\#(c^p \cup d^q) = f^\# c^p \cup f^\# d^q$$

证明　对任意的 $s \in S^{p+q}(X)$，

$$\begin{aligned} f^\#(c^p \cup d^q)(s) &= (c^p \cup d^q)f(s) = c^p((fs)\lambda_p)\cdot d^q((fs)\mu_q) \\ &= c^p(f(s\lambda_p))\cdot d^q(f(s\mu_p)) = f^\# c^p(s\lambda_p)\cdot f^\# d^q(s\mu_q)) \\ &= f^\# c^p \cup f^\# d^q(s) \end{aligned}$$ ∎

上链在上积之下构成的环，一般是不可交换的. 例如 $X = I \sim \Delta = (e_0e_1)$，定义零维上链 c^0 和 d^0 分别为对 $x \in X$，$c^0(x) = \begin{cases} 1, & x = e_0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$；$d^0(x) = \begin{cases} 1, & x = e_1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$. 对于与 I 恒同的 1 维单形 $s^1 = (e_0e_1)$，我们有 $c^0 \cup d^0(e_0e_1) = (c^0(e_0)\cdot d^0(e_1)) = 1$，而 $d^0 \cup c^0(e_0e_1) = d^0(e_0)\cdot c^0(e_1) = 0$. 表明 $c^0 \cup d^0 \neq d^0 \cup c^0$. 我们有下面的

定理　对于上同调类 $[a^p]$ 与 $[b^q]$ 和整数环 $\mathbf{Z}$，我们有

$$a^p \cup b^q = (-1)^{pq} b^q \cup a^p.$$

证明　设奇异单形 $\sigma_{p+q} = (v_0v_1\cdots v_{p+q})$，记 $\sigma_p = (v_0\cdots v_p)$，$\sigma_q = (v_p\cdots v_{p+q})$. 现对诸顶点取相反的顺序，并记为 $\sigma_{p+q}' = (v_{p+q},\cdots,v_1v_0)$. 则 $\sigma_{p+q}' = (-1)^{\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)}\sigma_{p+q}$. 同理，$\sigma_q' = (v_{p+q}\cdots v_p) = (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)}\sigma_q$，$\sigma_p' = (v_p\cdots v_0) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}\sigma_p$. 现用 $\cup'$ 表示在反序单形取值，以区别 $\cup$ 为在原顺序的单形上取值. 设 a^p，b^q 分别是 $[a^p]$ 和 $[b^q]$ 的代表元素，则

$$(b^q \cup' a^p)(\sigma_{p+q}') = (-1)^{\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)}(b^q \cup' a^p)(\sigma_{p+q})$$

上式左端等于 $b^q(\sigma_q')\cdot a^p(\sigma_p') = (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)} b^q(\sigma_q)\cdot$

$(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}a^p(\sigma_p) - (-1)^{\frac{1}{2}(p^2+p+q^2+q)} a^p(\sigma_p)\cdot b^q(\sigma_q) = (-1)^{\frac{1}{2}(p^2+q^2+p+q)}(a^p\cup b^q)(\sigma_{p+q})$. 从而得出 $(b^q\cup a^p)(\sigma_{p+q}) = (-1)^{pq}(a^p\cup b^q)(\sigma_{p+q})$.

因为 σ_{p+q} 诸顶点的反序是 σ_{p+q} 到自身的线性变换, 记为 θ. 则 $\partial\theta=\theta\partial$ 显然成立, 它是链映射, 从此诱导出上链映射 $\theta^\#$, 它与 δ 可交换. 而 θ 与恒同是链同伦的. 从此诱导出 $\theta^\#$ 与 $1_a^\#$ 是上链同伦的. 根据上面的命题, $\theta^\#(a^p\cup' b^q) = \theta^\# a\cup\theta^\# b$ 与 $a^p\cup b^q$ 是上同调的. 因此

$b^q\cup a^p \sim b^q\cup' a^p$, 而 $b^q\cup' a^p = (-1)^{pq}(a^p\cup b^q)$

从此得出 $[b^q\cup a^p] = (-1)^{pq}[a^q\cup b^p]$. ▌

这个定理也称为上同调环具 Grassman 性质

最后引进上积的伴随运算∩:

定义 对上链 $c^p\in C^p(X)$, 链 $z_{p+q}\in C_{p+q}(X)$, 定义运算∩: $C_{p+q}(X)\times C^p(X)\to C_q(X)$ 为 $z_{p+q}\cap c^p\in C_q(X)$ 满足关系式 $(z_{p+q}\cap c^p)(d^q) = (c^p\cup d^q)(z_{p+q})$, 此中 $d^q\in C^q(X)$. 我们称这种乘积运算为**下积或交积**

更明确地说, 即对任意的奇异 $(p+q)$ 单形 s_{p+q} 和 $c^p\in C^p$, 令 $s_{p+q}\cap c^p = [s_{p+q}\lambda_p, c^p]s_{p+q}\mu_q$, 再作线性扩充.

从定义即可得出下列诸性质:

(1) 乘积∩是双线性的.

(2) $(z_r\cap c^p)\cap d^q = z_r\cap(c^p\cup d^q)\ (r\geq p+q)$

(3) $z_p\cap c^0 = z_p$

(4) $z_p\cap c^p = c^p(z_p)\in\mathbf{Z}$.

(5) 设 $z_{p+q}\in S_{p+q}(X)$, $c^p\in S^p(X)$, 则

$$\partial(z_{p+q}\cap c^p)=(-1)^p(\partial z_{p+q}\cap c^p-z_{p+q}\cap\delta c^p).$$

命题 (i)闭链∩上闭链=闭链;

(ii)闭链∩上边缘链=边缘链;

(iii)边缘链∩上闭链=边缘链 ∎

定理 卡积诱导出相应的同调群与上同调群双线性同态,仍记为∩:

$$H_{p+q}(X)\times H^p(X)\to H_q(X)$$

证明 对$[z_{p+q}]\in H_{p+q}(X)$和$[c^p]\in H^p(X)$.分别取$[z_{p+q}]$和$[c^p]$的代表元$(z_{p+q}+\partial z_{p+q+1})$和$(c^p+\delta c^{p-1})$,则

$$(z_{p+q}+\partial z_{p+q+1})\cap(c^p+\delta c^{p-1})=z_{p+q}\cap c^p+z_{p+q}\cap\delta c^{p-1}$$
$$+\partial z_{p+q+1}\cap c^p+\partial z_{p+q+1}\cap\delta c^{p-1}$$

根据上面的命题,右边后三项都是边缘链,因此右边是q维同调类$[z_{p+q}\cap c^p]$的代表元.证明了$[z_{p+q}]\cap[c^p]=[z_{p+q}\cap c^p]$.
∎

定理 设$f:X\to Y$是连续映射,$[a]\in H_{p+q}(X)$,$[b]\in H^p(Y)$,则$f_*([a]\cap f^*[b])=f_*[a]\cap[b]$

证明 任取Y上q维上同调类$[c]\in H^q(Y)$,设a,b,c分别是诸同调类$[a]$、$[b]$、$[c]$的代表元,于是c在$f_\#(a\cap f^\#(b))$上的取值

$$(f_\#(a\cap f^\#(b)),c)=(f^\#(c),a\cap f^\#(b))=(f^\#(b)\smile f^\#(c),a)=(f^\#(b\smile c),a)=(b\smile c,f_\#(a)),$$

而c在$f_\#(a)\cap b$上的取值为

$$(c,f_\#(a)\cap b)=(f_\#(a),b\smile c).$$

两式相等,所以等式得到证明. ∎

§3　高维同伦群

第一章介绍空间 X 的基本群，也称为 1 维同伦群. 以 $\pi_1(X, x_0)$ 表示基点在 x_0 处，X 中以 x_0 为基点的闭路等价类集合在等价类乘积之下构成的群. 这时闭路是定义为连续映射 $I\to X$，把 I 的边界点 $\{0,1\}$ 映为 x_0，于是我们很自然地可以推广这个概念，以单位正方形到 X 的连续映射 $\beta: I\times I\to X$，并将方形的边界映为基点 x_0 定义为 2 维闭路. 另一种观点是把空间 X 中的闭路看为复平面上单位圆周 S^1 到 X 的连续映射，把复平面上点 1 映为 X 中的基点 x_0. 这时 S^1 可看为单位线段 I 的端点 0 与 1 等同起来所得到的商空间. 因此可定义 2 维闭路为 S^2 到 X 的连续映射. 上述两种 2 维闭路的概念还可推广到更高维的情况，定义高维闭路为高维单位方体或高维单位球面到拓扑空间 X 的连续映射. 还有一种观点是把 2 维闭路看为 1 维闭路集合的闭路，亦即一个 2 维闭路是定义在单位线段 I 上的函数 β，对每个 $t\in I$，$\beta(t)$ 是 X 中满足 $\beta(0)=\beta(1)$ 的一条闭路. 于是在 X 中以 x_0 为基点的闭路集合 $\Omega(X, x_0)$ 给予特定的拓扑之后，可定义 2 维同伦群为空间 $\Omega(X, x_0)$ 的 1 维同伦群. 因此高维同伦群有三种不同的定义，我们分别加以叙述.

定义 1　对拓扑空间 X 和点 $x_0\in X$，设 n 是给定的正整数，考虑从 n 维单位方体 $I^n=\{t\mid(t_1, t_2, \cdots, t_n)\in \boldsymbol{R}^n, 0\leq t_i\leq 1(i=1, \cdots, n)\}$ 到 X 的全体连续映射 α 的集合 $F_n(X, x_0)$，满足 $\alpha(\partial I^n)=x_0$，其中 $\partial I^n=\{t=(t_1, \cdots, t_n)\in I^n \mid 某些 t_i 等于 0 或 1\}$. 在 F_n

(X, x_0)中定义等价关系为：对 $\alpha, \beta \in F_n(X, x_0)$，如果存在一个同伦 $H: I^n \times I \to X$ 满足 $H(t_1, \cdots, t_n; 0) = \alpha(t_1, \cdots, t_n)$，$H(t_1, \cdots, t_n; 1) = \beta(t_1, \cdots, t_n)$，$(t_1, \cdots, t_n) \in I^n$；而且当$(t_1, \cdots, t_n) \in \partial I^n$，$s \in I$，$H(t_1, \cdots, t_n, s) = x_0$. 这时称 α **等价于** β **模** x_0，记为 $\alpha \underset{x_0}{\sim} \beta$. 由 α 决定的等价类记为$[\alpha]$，称为 α 的**同伦类**.

现在 $F_n(X, x_0)$上定义运算"$*$"如下：对 $\alpha, \beta \in F_n(X, x_0)$，

$$\alpha * \beta(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \cdots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n), & \dfrac{1}{2} < t_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

这样定义的 $\alpha * \beta: I \to X$ 是连续的. 这样的运算 $*$ 诱导出 $F_n(X, x_0)$的等价类集合上的一个运算"$\cdot$"为

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

关于这个运算，$F_n(X, x_0)$的等价类集合构成一个群，称为 X 以 x_0 为基点的 n **维同伦群**. 记为 $\pi_n(X, x_0)$.

从定义不难验证：(1)关系 $\underset{x_0}{\sim}$ 是 $F_n(X, x_0)$上的一个等价性关系；(2)运算 $*$ 完全决定运算$\cdot$，即当 $\alpha \underset{x_0}{\sim} \alpha'$ 且 $\beta \underset{x_0}{\sim} \beta'$，则 $\alpha * \beta \underset{x_0}{\sim} \alpha' * \beta'$，亦即运算$\cdot$与代表的选择无关；(3)在运算$\cdot$之下，$F_n(X, x_0)$构成群，这时群的恒等元是由常值映射 $c(I^n) = x_0$ 所决定的等价类$[c]$，而$[\alpha]$的逆元$[\alpha]^{-1}$是 α 的逆向闭路 $\bar{\alpha}$ 的等价类$[\bar{\alpha}]$，其中 $\alpha(t) = \alpha(t_1, \cdots, t_n)$的逆是 $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t_1, \cdots, t_n) = \alpha(1 - t_1, \cdots, t_n)$，$(t_1, \cdots, t_n) \in I^n$.

由于 I^n 通过将∂I^n 恒同于一点的商空间与 n 维球面 S^n 是同胚的，当我们以该恒同点对应于 S^n 上的一点 $1 = (1, 0, \cdots, 0)$，则 $\pi_n(X, x_0)$可通过空间偶$(S^n, 1)$到(X, x_0)的连续映射定义之.

定义 2 对一个给定的正整数 n，考虑单位球面 S^n 到空间 X

的一切连续映射 α，满足 $\alpha(1)=x_0\in X$ 的集合 $G_n(X,x_0)$，其中 $1=(1,0,\cdots,0)\in S^n$．在 $G_n(X,x_0)$ 上定义一个等价性关系为：对 $\alpha,\beta\in G_n(X,x_0)$，如果存在同伦 $H:S^n\times I\to X$ 满足 $H(\cdot,0)=\alpha$，$H(\cdot,1)=\beta$，而且 $H(1,s)=x_0$，$s\in I$，则称 α **等价于** β **模** x_0．α 所决定的等价类 $[\alpha]$ 称为 α 的同伦类，诸同伦类的集合也记为 $\pi_n(X,x_0)$

从定义，显然 $F_n(X,x_0)$ 与 $G_n(X,x_0)$ 之间有一个自然的一一对应：对每个 $\alpha\in G_n(X,x_0)$，设 q 是 I^n 到 S^n 的映射，它是把 ∂I^n 映为 $1\in S^n$ 的映射，则 $\alpha'=\alpha q\in F_n(X,x_0)$，而且 α 与 β 在 $G_n(X,x_0)$ 中是模 x_0 等价的，当且仅当它们的对应映射 $\alpha'=\alpha q$ 与 $\beta'=\beta q$ 在 $F_n(X,x_0)$ 中是等价的．因此定义 1 与定义 2 给出集合 $\pi_n(X,x_0)$ 的等价定义．这时定义 2 中的 $G_n(X,x_0)$ 的等价类的运算"·"可以用 S^n 到 I^n 的等同关系来定义．设 $\alpha,\beta\in G_n(X,x_0)$，而等同映射 q 分别把 $A=\{(t_1,\cdots,t_n)\in I^n\mid t_1\leqslant\frac{1}{2}\}$ 与 $B=\{(t_1,\cdots,t_n)\in I^n\mid t_1\geqslant\frac{1}{2}\}$ 映为 S^n 的上半球面和下半球面 A' 与 B'，而它们

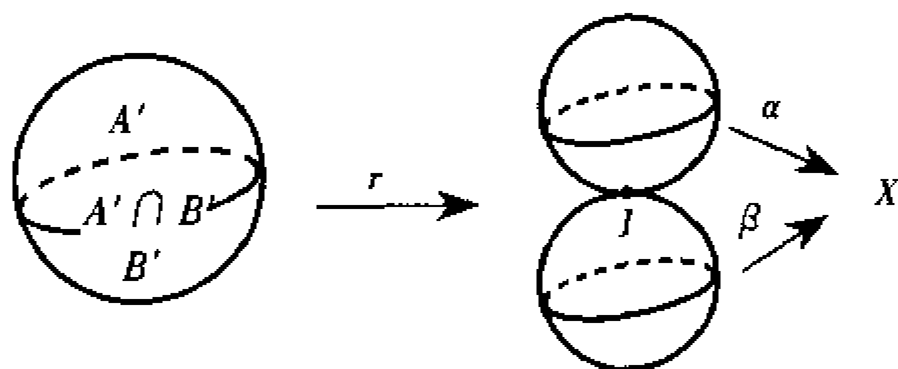


图 5-2

的交 $A'\cap B'=q(A\cap B)$与 S^{n-1}同胚. 我们把 $A'\cap B'$等同为基点 1 的等同映射记为 r, 即 $r(A'\cap B')=1\in S^n$, 则得到两个 n 维球面在公共点 1 相切($n=2$ 时如图 5-2 所示)于是 $\alpha*\beta$ 定义为

$$\alpha*\beta=\begin{cases}\alpha r(x), & x\in A'\\ \beta r(x), & x\in B'\end{cases}$$

$G_n(X,x_0)$等价类的运算"·"定义为

$$[\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha*\beta]$$

根据 F_n 与 G_n 中的 n 维闭路等价性关系互为充要条件, 因此由 F_n 与 G_n 所构成的群 $\pi_n(X,x_0)$是同构的, 所以两种定义是等价的.

为了描述第三种定义, 需要对基点在 $x_0\in X$ 处的闭路集合引进一种拓扑, 从而使该集合成为一个拓扑空间. 为此, 我们引进下述概念:

定义 设 F 是从空间 Y 到空间 Z 的连续映射的集合, 设 K 是 Y 中紧致集而 U 是 Z 中开集, 记 $W=(K,U)=\{\alpha\in F\mid\alpha(K)\subset U\}$, 当 K 遍历 Y 中紧致集而 U 遍历 Z 中的开集, 则以集合 $W(K,U)$为子基构成 F 的拓扑称为F 的**紧致开拓扑**.

将上述定义应用于空间 X 中以 $x_0\in X$ 为基点的全体闭路的集合, 即有下面的概念:

定义 对空间 X 及点 $x_0\in X$, 考虑 X 中以 x_0 为基点的全体闭路集合 $\Omega(X,x_0)$. 设 K 是单位线段 I 的紧子集而 U 在 X 中是开的. 令 $W(K,U)=\{\alpha\in\Omega(X,x_0)\mid\alpha(K)\subset U\}$, 以这种集合 $W(K,U)$作为 $\Omega(X,x_0)$的拓扑的子基, 则该拓扑称为 $\Omega(X,x_0)$上**的紧致开拓扑**.

该拓扑的基本集取形式$\bigcap_{i=1}^{r}W(K_i,U_i)$, 其中 K_i 为 I 的紧子集

而 U_i 为 X 的开集($i=1,\cdots,r$). 这时, 一条闭路 α 属于某个基开集, 当且仅当对每个 $i=1,\cdots,r$, $\alpha(K_i)\subset U_i$.

注 当 X 是度量空间, 则 $\Omega(X,x_0)$的紧致开拓扑与空间的一致收敛拓扑是相同的

现在引进高维同伦群的第三种定义

定义 3 对空间 X 及点 $x_0\in X$, 考虑 X 中以 x_0 为基点的全体闭路集合 $\Omega(X,x_0)$, 赋予紧致开拓扑, 当 $n\geqslant 2$, 则 X 以 x_0 为基点的 n **维同伦群** $\pi_n(X,x_0)$是 $\Omega(X,x_0)$在 c 处的$(n-1)$维同伦群, 其中 c 是 x_0 处的常值道路 因此, $\pi_2(X,x_0)=\pi_1(\Omega(X,x_0),c),\cdots,\pi_n(X,x_0)=\pi_{n-1}(\Omega(X,x_0),c)$.

关于高维同伦群的三种定义各有优点, 视所讨论的问题而定, 我们已对前两种定义的等价性作了叙述, 这里以 $n=2$ 为例说明定义 1 与定义 3 也是等价的

设 α 是定义 1 从 I^2 到 X 的连续映射, 把∂I^2 映到 $x_0\in X$. 则 α 决定 $\Omega(\Omega(X,x_0),c)$的一个成员 $\hat{\alpha}$, 由 $\hat{\alpha}(t_1)(t_2)=\alpha(t_1,t_2)$, $(t_1,t_2)\in I$ 所决定 因为 α 连续, $\hat{\alpha}(t_1)$是从 I 到 X 的连续函数, 由于 $\hat{\alpha}(t_1)(0)=\hat{\alpha}(t_1)(1)=x_0$, 因此 $\hat{\alpha}(t_1)\in\Omega(X,x_0)$, 此中 $\Omega(X,x_0)$是以 x_0 为基点的闭路集合, 而且 $\hat{\alpha}(0)=\hat{\alpha}(1)=x_0$ 是常值道路 $c:I\to x_0$. 为了验证 $\hat{\alpha}$ 连续, 取 $\Omega(X,x_0)$中的子基 $W(K,U)$, 设 $t_1\in\hat{\alpha}^{-1}(W(K,U))$, 于是 $\hat{\alpha}(t_1)(K)=\alpha(\{t_1\}\times K)\subset U$, 由于 K 紧致, 故在 I 中存在包含 t_1 的开集 O 使 $\alpha(O\times K)\subset U$, 因此 $t_1\in O\subset\hat{\alpha}^{-1}(W(K,U))$, 所以 $\hat{\alpha}$ 是 I 到 $\Omega(X,x_0)$的连续函数

另方面, 对 $\Omega(\Omega(X,x_0),c)$的一个成员 $\hat{\alpha}$, 则 $\hat{\alpha}$ 决定一个函数 $\alpha:I^2\to X$ 由 $\alpha(t_1,t_2)=\hat{\alpha}(t_1)(t_2)$, $(t_1,t_2)\in I^2$ 所决定. 因为 $\hat{\alpha}$

$(t_1)\in\Omega(X,x_0)$是$I\to X$的连续函数，它在紧致开拓扑之下是连续的，而且有$\hat{\alpha}(t_1)(0)=\hat{\alpha}(t_1)(1)=x_0$，即$\alpha$在$\partial I^2$上取值为$x_0$，所以$\alpha\in F_2(X,x_0)$，因此$\alpha$与$\hat{\alpha}$建立了$F_2(X,x_0)$与$\Omega(\Omega(X,x_0),c)$的一一对应．再由定义1，当$\alpha$与$\beta$是等价的，即存在同伦$H:I^2\times I\to X$满足$H(I^2,0)=\alpha$，$H(I^2,1)=\beta$，$H(\partial I^2,s)=x_0$，$s\in I$．于是同伦$\hat{H}:I\times I\to\Omega(X,x_0)$由$\hat{H}(t_1,s)(t_2)=H(t_1,t_2;s)$，$t_1,t_2\in I$所决定．表明闭路$\hat{\alpha}$与$\hat{\beta}$的等价性．上式也表明$\hat{\alpha}$与$\hat{\beta}$等价蕴涵$\alpha$与$\beta$等价．因此等价类$[\alpha]$与$[\hat{\alpha}]$的对应是一一的，而且对$\alpha,\beta\in F_2(X,x_0)$，$[\alpha*\beta]$对应于$[\hat{\alpha}*\hat{\beta}]$，因此两个定义决定了两个群$\pi_2(X,x_0)$是同构的．

关于$\pi_n(X,x_0)$的一些性质，与基本群类似，证法亦类同．

定理　设空间X是道路连通的，而且$x_0,x_1\in X$，则对$n\geqslant1$，$\pi_n(X,x_0)\approx\pi_n(X,x_1)$．▌

定理　设X可缩，它与保留点x_0不动的常值映射同伦，则对$n\geqslant1$，$\pi_n(X,x_0)\approx0$．▌

定理　对空间X，Y；设$x_0\in X$，$y_0\in Y$，则对$n\geqslant1$，$\pi_n(X\times Y,(x_0,y_0))\approx\pi_n(X,x_0)\oplus\pi_n(Y,y_0)$．▌

从上述定理，则实直线，有限维欧氏空间，区间，以及欧氏空间中的凸集，其n维同伦都是平凡的．

对于高维同伦群的计算，一般而言是相当困难的，这里只举些简单例子．

例1　对$k<n$，则$\pi_k(S^n)$是平凡的．

设$[\alpha]\in\pi_k(S^n)$，考虑$\alpha:(S^k,1)\to(S^n,1)$．现在以S^k和S^n分别看为$(k+1)$维和$(n+1)$维单形的边界．则对连续映射α，有一个α的单纯逼近$\alpha':S^k\to S^n$，且$\alpha'\sim\alpha$．即满足$[\alpha]=[\alpha']$，由于单纯映

射不能把低维单形映满较高维单形，所以 α 非满射，设 $p\notin\alpha'(S^k)\subset S^n$，于是 $S^n\setminus\{p\}$ 与 R^n 同胚是可缩的，映射 α' 的值域落在可缩空间中，是零伦的．所以 $[\alpha]=[\alpha']=[c]$，因此 $\pi_k(S^n)$ 的唯一成员是由常值映射 c 所决定的等价类，即 $\pi_k(S^n)=\{0\}$，$(k<n)$

例2　对 $n\geqslant 1$，$\pi_n(S^n)\approx Z$

当 $n=1$ 时，在第一章已证明过 $\pi_1(S^1)\approx Z$．现考虑 $n\geqslant 2$，由定义2，$\pi_n(S^n)$ 的成员是映射 $\alpha:(S^n,1)\to(S^n,1)$ 的等价类．通过映射 $\rho:\pi_n(S^n)\to Z$ 定义为 $\rho([\alpha])=\alpha$ 的度，$[\alpha]\in\pi_n(S^n)$．由于同伦的映射具相同的度，所以定义与等价类的代表选择无关，即 ρ 的定义是完全确定的．由§6 拓扑度的定义，它是对 S^n 的剖分 K 的 $H_n(K)$ 的母元 $\{z_n\}$，满足 $\tilde{\alpha}_{*n}(\{z_n\})=\rho\{z_n\}$ 的整数 ρ．此中 $\tilde{\alpha}$ 是与连续映射 α 相应多面体 $|K|$ 的单纯逼近．由于 S^n 的剖分 K 是伪流形，$H_n(K)\approx Z$．而 Hopf 证明了对每个度，决定唯一的同伦类 $\pi_n(S^n)$（其证明超出本书范围）因此 $\pi_n(S^n)\approx Z$．

对 $k>n$，则 $\pi_k(S^n)$ 为何，尚未完全解决。

在第一章曾指出1维同伦群是不可交换的．然而我们有

定理　当 $n\geqslant 2$，则 $\pi_n(X,x_0)$ 是交换群．

证明　当 $n\geqslant 2$，存在旋转 $r:(S^n,1)\to(S^n,1)$ 使得 $r\simeq 1_{S^n}:S^n\to S^n$ 保持 $1\in S^n$ 不动而且 $r(S^n_+)=S^n_-$，$r(S^n_-)=S^n_+$．此中 S^n_+，S^n_- 分别表示上半球面和下半球面．

现设 $[\sigma]$，$[\tau]\in\pi_n(X,x_0)$，$\sigma(S^n_-)=\{x_0\}$，$\tau(S^n_+)=\{x_0\}$．于是 $[\sigma]\circ[\tau]=[\xi]$，此中
$$\xi(s)=\begin{cases}\sigma(s), & s\in S^n_+\\ \tau(s), & s\in S^n_-\end{cases}$$
而
$$\xi r(s)=\begin{cases}\tau r(s), & s\in S^n_+\\ \sigma r(s), & s\in S^n_-\end{cases}\qquad \tau r(S^n_-)=\{x_0\},\ \sigma r(S^n_+)=\{x_0\}$$

因为 $r\simeq 1_{S^n}$ rel $\{1\}$, $1\in S^n$.
即得出 $[\xi]=[\xi r]$, $[\sigma]=[\sigma r]$, $[\tau]=[\tau r]$. 于是从 $[\xi]=[\sigma]\circ[\tau]$ 和 $[\xi r]=[\tau r]\circ[\sigma r]=[\tau]\circ[\sigma]$ 得出 $[\sigma]\circ[\tau]=[\tau]\circ[\sigma]$. ▌

定理　(1)　设 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, $g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ 是空间偶的连续映射, 则对每个维数 n, 诱导同态 $(gf)_{*n}=g_{*n}f_{*n}:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Z,z_0)$

(2)　当 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是同胚, 则对每个 n, h 的诱导 h_{*n} 是同构

证明　(1) 任意的 $[\alpha]\in\pi_n(X,x_0)$,

$(gf)_{*n}([\alpha])=[gf\alpha]=g_{*n}[f\alpha]=g_{*n}f_{*n}[\alpha]$ 所以 $(gf)_*=g_*f_*$

(2)　设 h 为同胚, 令 $h^{-1}:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 为同胚逆, 则对任意的 $[\alpha]\in\pi_n(X,x_0)$, 由(1),

$h_*^{-1}h_*([\alpha])=[h^{-1}h\alpha]=[\alpha]$,

所以 $h_*^{-1}h_*$ 是 $\pi_n(X,x_0)$ 上的恒同, 同理 $h_*(h^{-1})_*$ 也是 $\pi_n(Y,y_0)$ 上的恒同, 因此 h_* 是同构. ▌

在第一章证明过覆盖空间的覆盖投影 $p:\tilde{X}\to X$ 诱导的 $p_*:\pi_1(\tilde{X})\to\pi_1(X)$ 是单同态. 对于高维同伦群 $\pi_n(X,x_0)(n\geqslant 0)$, 我们有

定理　设 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的覆盖空间, $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $p(\tilde{x}_0)=x_0$ 则诱导同态 $p_*:\pi_n(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_n(X,x_0)$ 是同构.

证明　先证明 p_* 是满射. 设 $[\alpha]\in\pi_n(X,x_0)$, 把 α 看为从 $(S^n,1)$ 到 (X,x_0) 的连续映射(此中 1 表示基点 $1\in S^n$). 当 $n\geqslant 2$, 基本群 $\pi_1(S^n,1)$ 是平凡的, 因此 $\alpha_*\pi_1(S^n,1)=\{0\}\subset p_*\pi_1(X,

x_0)，此中 α_* 是由 α 诱导的在基本群上的同态，即 $\alpha_*:\pi_1(S^n,1)\to\pi_1(X,x_0)$. 由第一章有关命题，保证 α 有一个连续的提升 $\tilde{\alpha}$.

$\tilde{\alpha}:(S^n,1)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ 使得 $p\tilde{\alpha}=\alpha$. 于是 $\tilde{\alpha}$ 决定 $\pi_n((\tilde{X},\tilde{x}_0)$ 中一个成员 $[\tilde{\alpha}]$ 满足 $p_*([\tilde{\alpha}])=[p\tilde{\alpha}]=[\alpha]$. 证明了 p_* 是满的.

为证明 p_* 是单射，设 $[\beta]\in\mathrm{Ker}\,p_*$，亦即 $p_*([\beta])=[p\beta]=[c_{x_0}]$，此中 c_{x_0} 是 S^n 到 x_0 的常值映射. 作为 $(S^n,1)$ 到 (X,x_0) 的映射 $p\beta$ 与 c_{x_0} 等价，则存在一个同伦 $H:S^n\times I\to X$ 满足 $H(t,0)=p\beta(t)$, $H(t,1)=c_{x_0}$, $t\in S^n$, $H(\bar{1},s)=x_0$, $s\in I$. 由于当 $n\geqslant 2$，基本群 $\pi_1(S^n\times I,(1,0))$ 是平凡群，所以存在同伦 H 的提升 $\tilde{H}:S^n\times I\to\tilde{X}$ 满足 $p\tilde{H}=H$, $\tilde{H}(1,0)=\tilde{x}_0$. 则提升同伦 $\tilde{H}$ 是 β 与 S^n 到 $\tilde{x}_0$ 的常值映射 $c_{\tilde{x}_0}:S^n\to\tilde{x}_0$ 的同伦. 为了说明这一结论，首先 $p\tilde{H}(\cdot,0)=p\beta$, $\tilde{H}(\bar{1},0)=\beta(1)$. 根据覆盖空间有关性质，由于 S^n 是连通的，当从 $S^n\to\tilde{X}$ 的两个映射在 S^n 的一点处取相同值，则两个映射一致. 因此 $\tilde{H}(\cdot,1)=c_{\tilde{x}_0}$. 剩下的是显示 $\tilde{H}(\bar{1},s)=c_{\tilde{x}_0}$，对一切 $s\in I$ 成立. 因为道路 $\tilde{H}(\bar{1},\cdot):I\to\tilde{X}$ 具起点 $\tilde{x}_0$ 且覆盖常值道路 $c=H(\bar{1},\cdot)$. 由于从 $\tilde{x}_0$ 出发的 c 的覆盖道路是 $\tilde{x}_0$ 处的常值道路，于是 $\tilde{H}(\bar{1},s)=\tilde{x}_0$, $s\in I$. 从此 $\tilde{H}:S^n\times I\to\tilde{X}$ 是同伦，满足 $\tilde{H}(\cdot,0)=\beta$, $\tilde{H}(\cdot,1)=c_{\tilde{x}_0}$, $\tilde{H}(\bar{1},s)=\tilde{x}_0$, $s\in I$. 所以 $[\beta]=[c_{\tilde{x}_0}]$ 是 $\pi_n(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ 的恒等元. 即 p_* 的核仅含 $\pi_n(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ 的恒等元，所以 p_* 是单射 ▌

例　单位圆周 S^1 的道用覆盖空间 $(\boldsymbol{R},p)$，由定理，$p_*:\pi_n$

$(\boldsymbol{R}) \to \pi_n(S^1)(n \geqslant 2)$是同构，由于 $\boldsymbol{R}$ 可缩，$\pi_n(\boldsymbol{R}) = \{0\}$，因此 $\pi_n(S^1) = \{0\}(n \geqslant 2)$

附录 交换群

§1 群的一般概念

定义 若 G 是非空集合,映射 $\lambda: G\times G\to G$ 规定为

$$\lambda(g_1,g_2)=g_1\cdot g_2,\quad g_1,g_2\in G$$

我们称 $g_1\cdot g_2\in G$ 是 g_1 与 g_2 的**乘积**,λ 称为**乘积运算**. 当 λ 还满足下列诸条件:

(G_1) 结合律:$(g_1\cdot g_2)\cdot g_3=g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$, $g_1,g_2,g_3\in G$

(G_2) 存在一个**单位元** $e\in G$ 使得

$$g\cdot e=e\cdot g=g,\quad g\in G$$

(G_3) 对每个 $g\in G$,存在一个 g 的**逆元** $g^{-1}\in G$,使得 $g\cdot g^{-1}=e=g^{-1}\cdot g$

则称 G 在运算 λ 之下构成一个(乘法)**群**

不难验证 G 的单位元是唯一的,而且每个元素的逆元素也是唯一的

n 个 g 的乘积记为 g^n(n 为自然数). 当 $n=0$,约定 $g^0=e$. 我们以满足 $g^n=e$ 的最小正整数 n 称为该元素 g 的阶;当这样的 n 不存在,则称该元素 g 是无限阶的

(G_4)交换律:如果对任意的 $g_1, g_2 \in G$,有 $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \in G$,则称群 G 满足交换律,这时称群 G 为**交换群**或 **Abel 群**.

对于交换群,这时称该群的运算 λ 为加法运算,记号"·"改为"+"号,即记 $\lambda(g_1 \cdot g_2) = g_1 + g_2$, $g_1, g_2 \in G$. 这时 n 个 g 的和 $\underbrace{a + \cdots + a}_{n个}$ 记为 na. 乘法群 G 的单位元有时也记为"1",而加法群的单位元常记为"0".

例 1 全体实数的集合 $\boldsymbol{R}$,关于实数加法构成一个交换群,称为**实数加群**. 有理数集合 $\boldsymbol{Q}$ 和整数集合 $\boldsymbol{Z}$ 关于加法也构成交换群,分别称为**有理数加群**和**整数加群**. 这时它们的单位元集合 $\{0\}$ 也构成一个交换群,称为**平凡群**.

例 2 $\boldsymbol{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 关于模 n 的加法也构成群,称为**整数模 n 加群**,这时的模 n 加法乃对 $a, b \in \boldsymbol{Z}_n$,如果 $a + b = cn + d$,其中 $c, d \in \boldsymbol{Z}, 0 \leqslant d < n$,则定义 $a + b = d$(模 n)或记为 $a + b = d \pmod n$.

例 3 所有的非退化 $n \times n$ 实数方阵在矩阵乘法之下构成群,称为**实的一般线性群**,记为 $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$. 它的单位元是 n 阶单位方阵 $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

例 4 所谓 **n 次对称群**,它的元素是 n 个文字的置换,记为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix};$$

设 β 是另一个置换 $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \cdots & \beta(n) \end{pmatrix}$,

则定义 α 与 β 的乘法为两个置换的合成,记为

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \cdots & \beta(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha\beta(1) & \alpha\beta(2) & \cdots & \alpha\beta(n) \end{pmatrix}$$

不难验证，所有的置换在上述的乘法运算之下构成群，记为 S_n. 它的单位元是恒同置换 $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$；置换 α 的逆元 $\alpha^{-1}=$
$\begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

定义 对群 G 的子集 H，如果它在群 G 的运算之下也构成群，则称 H 是 G 的**子群**.

命题 1 设 H 是群 G 的子集，则 H 是群 G 的子群当且仅当下列两条件成立：(1) 若 $h\in H$，则 $h^{-1}\in H$；(2) 若 $h_1, h_2\in H$，则 $h_1\cdot h_2\in H$. ▌

命题 2 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是群 G 的一族子群，则 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ 仍然是 G 的子群. ▌

定义 设 M 是群 G 的子集，所有包含 M 的子群的交称为由 M 生成的子群，把它记为 $\langle M\rangle$，这时称 M 的诸元素为 $\langle M\rangle$ 的生成元组，M 的成员称为群 $\langle M\rangle$ 的生成元. 特当 G 的子集 M 满足 $\langle M\rangle=G$ 时，则 M 称为群 G 的一个**生成元组**. 当群 G 具有一个由有限个元素组成的生成元组，则称 G 是**有限生成的群**.

由一个元素 g 生成的群 $G=\{g^m \mid g\in G, m\in Z\}$ 称为**循环群**. 它显然是一个交换群. 当 g 是一个 n 阶元素，即 $g^n=e$（群 G 的单位元），则称 g 生成**一个有限循环群**，它由 $\{g^0=e, g^1, \cdots, g^{n-1}\}$ 所组成. 当 g 是无限阶元素，则称 g 生成一个**无限循环群**. 群 G 中一切有限阶元素的集合是 G 的子群，称为 G 的**挠子群**. 当群 G 的挠子群是平凡群，则称群 G 是**无挠的**.

定义 设 A 与 B 是群 G 的两个子集，则集合 $AB=\{ab \mid a\in$

A, $b\in B$, 称为 A 与 B 的**乘积**. 特当 H 是群 G 的子群, $g\in G$; 则子集

$$gH=\{gh\mid h\in H\} \text{ 和 } Hg=\{hg\mid h\in H\}$$

分别称为子群 H 在 G 中的**左陪集**和**右陪集**, 这时 gh 与 hg 分别是左陪集 gH 和右陪集 Hg 的一个代表. 这是因为对 $h\in H$, 则 $(gh)H=gH$, $H(hg)=Hg$.

命题 3 设 H 是 G 的子群, 则 H 在 G 中任两左陪集(或右陪集)必相等或不相交.

证明 设 g_1H 和 g_2H 是子群 H 在 G 中的两个左陪集, 假如 $g_1H\cap g_2H\neq\varnothing$, 设 $x\in g_1H\cap g_2H$, 则存在 h_1、$h_2\in H$ 使得 $g_1h_1=x=g_2h_2$. 因此 $g_1=g_2h_2h_1^{-1}$, 从而得出 $g_1H=(g_2h_2h_1^{-1})H=g_2(h_2h_1^{-1})H=g_2H$. ▌

命题 4 群 G 的子群 H 在 G 中的左陪集和右陪集的个数相等.

证明 对于 G 的子群 H, 由 $h\in H$ 与 $gh\in gH$ 的对应可看出 H 与 gH 是等势的. 对 $gh\in gH$, 我们有 $H(gh)^{-1}=Hh^{-1}g^{-1}=Hg^{-1}$, 因此 gH 与 Hg 之间由这个关系, 即存在一个映射 $f: gH\to Hg^{-1}$ ($g\in G$). f 显然是满射. 再者, 若 $Hg_1^{-1}=Hg_2^{-1}$, 则存在 x 使 $x\in Hg_1^{-1}\cap Hg_2^{-1}$, 从而得出 $x^{-1}\in g_1H\cap g_2H$, 由命题 3, $g_1H=g_2H$. 所以 f 是单射, 因此 f 是双射, 即 gH 与 Hg 存在一一对应. ▌

从这个命题, 我们得出子群 H 在群 G 中的全体左陪集(或右陪集)构成 G 的一个等价分类, 称为群 G 对子群 H 的**左(或右)陪集分解**. 分解的陪集的个数称为 H 在 G 中的**指数**.

例 1 设 H 是交换群 G 的子群, 则对任意的 $g\in G$, $g+H=H+g$, 因此 H 的左(或右)陪集分解是相同的.

例 2 对给定的正整数 m, 令 $m\mathbf{Z}=\{mn\mid n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $m\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Z}$

的子群，这时 $\mathbf{Z}$ 对 $m\mathbf{Z}$ 的陪集分解的个数是 m，即 $0+m\mathbf{Z},1+m\mathbf{Z},\cdots,(m-1)+m\mathbf{Z}$ 亦即 $m\mathbf{Z}$ 在 $\mathbf{Z}$ 中的指数为 m

例3　三次对称群 S_3 有 $3!$ 个元素，它们是 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$；这时由 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ 构成 S_3 的子群，设为 H. 于是对 $g\in\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$，则 $gH=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$，而 $Hg=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$，因此 $gH\neq Hg$，表明对称群关于某个子群的左、右陪集分解一般是不相同的.

定义　设 H 是 G 的子群，如果对任意的 $x\in G$，都有 $xH=Hx$，或即 $H=x^{-1}Hx$，则称 H 是 G 的**正规子群**.

当 H 是 G 的正规子群，则 G 对 H 的左或右陪集分解是相同的. 这时定义左陪集的一个(乘法)运算为：对 $x,y\in G$，则 $(xH)(yH)=(xy)H$，这种运算与左陪集的代表选择无关. 因此子群 H 在群 G 中全体左(或右)陪集在这种运算之下构成群，称为 G **模** H **商群**，记为 G/H. 通常以 G/H 的陪集成员 xH 记为 $[x]$，其中 x 是 $[x]$ 的一个代表. 从此，可验证 G 到 G/H 存在一个满同态 $\pi:G\to G/H$(注意到 H 是 G 的正规子群). 它称为 G 到商群 G/H 的**自然投影**

定义　设 $f:G\to H$ 是群 G 到群 H 的映射，当它满足 $f(g_1\cdot g_2)=f(g_1)\circ f(g_2)$，$g_1,g_2\in G$，此中"$\cdot$"和"$\circ$"分别表示 G 和 H 的群运算；则称 f 是群 G 到 H 的**同态**. 集合 $f^{-1}(e_H)$，此中 e_H 是

群 H 的单位元,它是 G 的子群,称为同态 f 的**核**,记为 $\mathrm{Ker}\, f$. 而集合 $f(G)$ 也是 H 的子群,称为同态 f 的**像**,记为 $\mathrm{Im}\, f$. 当 $\mathrm{Ker}\, f$ G 的单位元 e_G,即 f 的核是 G 的平凡群,则称 f 是**单同态**. 而当 $\mathrm{Im}\, f = H$,则称 f 为**满同态**. 当 f 既是单同态,又是满同态,则称 f 是**双射或满单射**;也称 f 是群 G 与群 H 的**同构**,记为 $f: G \cong H$. 特当 f 是群 G 到自身的同态(或同构),则称 f 是 G 的**自同态**(或**自同构**)

恒同同态 $1_G: G \to G$ 是 G 到自身的同构,也称为**恒同同构**.

命题 5 设 $f: G \to H$, $g: H \to K$ 都是群同态,则

(1) $g \circ f: G \to K$ 也是同态;

(2) 如果 f 与 g 都是单同态,则 $g \circ f$ 也是单同态;

(3) 如果 f 与 g 都是满同态,则 $g \circ f$ 也是满同态;

(4) 如果 f 与 g 都是同构,则 $g \circ f$ 也是同构;

(5) 如果 $g \circ f$ 是同构,则 f 是单同态,而且 g 是满同态 ▌

命题 6 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 是一族的群,则 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 中的同构关系是一个等价关系. ▌

定理 (同态基本定理)设 $f: G \to H$ 是群同态,则 $\mathrm{Ker}\, f$ 是 G 的正规子群,$\mathrm{Im}\, f$ 是 H 的子群;而且 f 诱导出同构 $f_*: G/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$

证明 容易验证 $\mathrm{Ker}\, f$ 是 G 的正规子群,而且 $\mathrm{Im}\, f$ 显然是 H 的子群

现在定义 $f_*: G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ 为 $f_*[g] = f(g)$,其中 $g \in G$, $[g] \in G/\mathrm{Ker}\, f$.

首先,对 $[g_1], [g_2] \in G/\mathrm{Ker}\, f$, $f_*([g_1][g_2]) = f_*([g_1 g_2]) = f(g_1)f(g_2) = f_*([g_1])f_*([g_2])$,因此 f_* 是同态

其次,对任意的 $x \in \mathrm{Im}\, f$,则有 $g \in G$ 使得 $f(g) = x \in \mathrm{Im}\, f$,因

而有 g 在 $G/\mathrm{Ker}\, f$ 的左陪集 $g\,\mathrm{Ker}\, f$；它在 f_* 之下映为 $f(g)$，所以 f_* 是满同态.

最后，当 $f_*([g])=e$（$\mathrm{Im}\, f$ 的单位元），即 $f(g)=e$，所以 $g\in \mathrm{Ker}\, f$. 因此 $[g]$ 是 $G/\mathrm{Ker}\, f$ 的单位元，所以 f_* 是单同态 ▌

推论　当 $f: G\to H$ 是满同态，则 $H\cong G/\mathrm{Ker}\, f$ ▌

命题　设 A 与 B 分别是 G 与 H 的正规子群，$f: G\to H$ 是同态而且 $f(A)\subset B$，则 f 诱导出同态 $f_*: G/A\to H/B$. 特当 $f: G\simeq H$，且满足 $f|_A: A\simeq B$，则 $f_*: G/A\simeq H/B$.

证明　对 $a\in G$，记 $[a]\in G/A$，$[a]$ 是集合 aA，因为 $f(A)\subset B$，$f(a)\in H$，所以 $f(aA)\subset f(a)B=[f(a)]\in H/B$，因此可定义 $f_*([a])=[f(a)]$. 于是对 $[a_1],[a_2]\in G/A$，$f([a_i])=[f(a_i)]\in H/B(i=1,2)$；$f_*([a_1][a_2])=f_*[a_1a_2]=[f(a_1)f(a_2)]=[f(a_1)][f(a_2)]=f_*([a_1])f_*([a_2])$，所以 $f_*: G/A\to H/B$ 是同态

特当 $G\simeq H$ 且 $f|_A: A\simeq B$ 时，对任一 $[x]\in H/B$，$[x]$ 的代表元 $x\in H$，由于 f 是同构，必存在唯一的 $g\in G$ 使 $f(g)=x$，于是 $[g]=gA$ 也是唯一的，它满足 $f_*([g])=[f(g)]=[x]$，所以 f_* 是满射. 再者，对 H/B 的单位元 $[e_H]=B$，它在 f 之下的完全原像是 $A\subset G$，它即 G/A 的单位元，表明 f_* 是单射. 因此 $G/A\simeq H/B$ ▌

例 1　设 m 是自然数，g 是群 G 的 m 阶元素，则 g 生成的子群 A 是 m 阶循环群. 对整数加群 $\mathbf{Z}$，$m\mathbf{Z}$ 是它们的正规子群，因此有商群 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$，记为 $\mathbf{Z}_m$

定义　设 A 与 B 都是群，在集合的直积 $A\times B$ 上定义一个运算为

$(a,b)(a',b')=(aa',bb')$，$a,a'\in A$，$b,b'\in B$

于是(e, e')是该运算的单位元，其中e, e'分别是群A与B的单位元，而(a^{-1}, b^{-1})则是(a, b)的逆元. 此外，该运算还满足结合律，因此直积$A \times B$在上述运算之下构成群，称为A与B的**直积**. 群的直积可推广到任意有限个或无限多个因子群的情况.

§2 交换群

交换群具有许多特殊的性质. 对交换群的群运算记为“+”，其单位元或平凡群记为0. 本节中所讨论的群都是交换群.

定义 设A与B是群G的子群，则子群$A + B \{a + b \in G \mid a \in A, b \in B\}$称为$A$与$B$的**和**. 推广到群$G$的子群族$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$(其中每个$A_\alpha$都是$G$的子群)的和，记为$\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$，即

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{\sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha \mid x_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in \Gamma; \text{而且除有限个 } \alpha \text{ 之外}, x_\alpha = 0\}$$

定义 设A与B都是G的子群，如果G的任意元素x可唯一地表为

$$x = a + b, a \in A, b \in B.$$

则称G是A与B的**直和**，记为$G = A \oplus B$，这时A与B称为G的**直加项**.

更一般的情况，设$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$是$G$的一族子群，如果$G$的任意元素$x$可唯一地表为

$$x = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha, a_\alpha \in A, \alpha \in \Gamma; \text{而且除有限个 } \alpha \text{ 之外}, a_\alpha = 0.$$

则称G为该族子群$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$的直和，记为$G = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$；其中$a_\beta(\beta \in \Gamma)$称为元素$\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha$的第$\beta$个坐标.

命题1　设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是群 G 的一族子群，则 $G=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$ 的充要条件是 $G=\sum_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，而且对任意的 $\beta\in\Gamma$，$A_\beta\cap(\sum_{\alpha\neq\beta}A_\alpha)=0$.

证明　设 G 是子群族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的直和，则任意元素 $x\in G$ 有唯一表示 $x=\sum_{\alpha\in\Gamma}a_\alpha$，$a_\alpha\in A_\alpha$，$\alpha\in\Gamma$（其中除有限个 α 外，$a_\alpha=0$），因此 $G\subset\sum_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$. 另一方面 $\sum_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\supset G$ 是显然的，因此 $G=\sum_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$.

假如 $x\in A_\beta\cap(\sum_{\alpha\neq\beta}A_\alpha)$，则 x 可表为 $a_\beta'+\sum_{\alpha\neq\beta}0$，也可表为 $0+\sum_{\alpha\neq\beta}a_\alpha'$，其中 $a_\alpha'\in A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$. 由直和表达式的唯一性，则 $a_\alpha'=0(\alpha\in\Gamma)$，因此 $x=0$.

另一方面，从 $G=\sum_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，对任意的 $x\in G$，可表为 $x=\sum_{\alpha\in\Gamma}a_\alpha$，$a_\alpha\in A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$，如果又可表为 $\sum_{\alpha\in\Gamma}a_\alpha'$，则对任意的 $\beta\in\Gamma$，$a_\beta-a_\beta'=\sum_{\alpha\neq\beta}(a_\alpha'-a_\alpha)$，由于 $A_\beta\cap(\sum_{\alpha\neq\beta}A_\alpha)=0$，上式左端在 A_β 中，而右端在 $\sum_{\alpha\neq\beta}A_\alpha$ 中，因此 $a_\beta-a_\beta'=0$，从而 $a_\alpha-a_\alpha'=0(\alpha\in\Gamma)$. 因此 x 的表达式唯一，所以 $A=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$. ▌

命题2　设 $G=A\oplus B$，则 $G/A\cong B$.

证明　因为交换群的子群总是正规子群，由 §1 的结论，$G/A\cong B$. ▌

注　命题 2 的逆不一定成立，即当 $G/G_1\cong G_2$，并不保证 $G=G_1\oplus G_2$.

例如整数加群 $\mathbf{Z}$ 的子群 $2\mathbf{Z}$，我们有 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}_2$，但是 $2\mathbf{Z}$ 并非 $\mathbf{Z}$ 的直加项. 否则的话，假如有 $\mathbf{Z}=2\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2$，则 $\mathbf{Z}_2\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 是有

限阶子群，而 $\mathbf{Z}$ 不具有限阶子群

命题 3 设 $G=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，群 $B_\alpha\subset A_\alpha$，$\alpha\in\Gamma$ 设 $H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，则 $G/H\simeq\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha/B_\alpha$

证明 由假设，G 是诸 $A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 的直和，则 G 的任一元素 x 可唯一地表为 $x=\sum_{\alpha\in\Gamma}a_\alpha$，$a_\alpha\in A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 定义 $f:G\to\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha/B_\alpha$ 为 $f(x)=\sum_{\alpha\in\Gamma}[a_\alpha]$，$x=\sum_{\alpha\in\Gamma}a_\alpha\in G$；其中 $[a_\alpha]$ 是 a_α 在商群 A_α/B_α 的陪集

首先对 $\sum_{\alpha\in\Gamma}[a_\alpha]\in\bigoplus A_\alpha/B_\alpha$，此中 $a_\alpha\in A_\alpha\subset G$，$a_\alpha$ 是 $[a_\alpha]$ 的代表 于是决定唯一的 $g=\sum_{\alpha\in\Gamma}a_\alpha\in\bigoplus A_\alpha=G$，$g$ 在 G/H 的陪集是完全确定的 所以 f 是满射

其次，对 $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha/B_\alpha$ 的单位元，即每个成员 A_α/B_α 的单位元的直和 由假设 $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha=H$，即 $\mathrm{Ker}\,f=H$. 因为 f 是交换群的满射，因此 $G/\mathrm{Ker}\,f\cong\mathrm{Im}\,f=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha/B_\alpha$. ▌

定理 设 B 与 C 是群 A 的子群，则

$$(B+C)/C\cong B/B\cap C$$

证明 设 $p:B+C\to B+C/C$ 是自然投影，令 $p'=p|_B:B\to(B+C)/C$，则 p' 是满同态 然而 $\mathrm{Ker}\,p'=\mathrm{Ker}\,p\cap B=C\cap B$，根据同态基本定理，即得出 $B/B\cap C\cong(B+C)/C$. ▌

定义 对群 G 的有限元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，如果存在不全为零的整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 使得 $\sum_1^k n_ix_i=0$，则称该元素组是**线性相关的**；否则称为**线性无关的**

如果 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 G 的线性无关组，而且对任意的 $x\in G$，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\bigcup\{x\}$ 成为 G 的线性相关组，则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为 G 的**极大线性无关组**

引理 设 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 与 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$ 是群 G 的两个极大线性无关组，则 $m=n$

证明 假设 $m>n$ 令 $X\cap Y=\{y_1,\cdots,y_k\}$，$0\leqslant k<n$ 因此有 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,k)$. 由于 Y 的极大线性无关性，则至少有一个 $y_j\notin X$. 因为如果所有的 y_j 都在 X 中，则 Y 非极大线性无关. 从 X 的极大线性无关性，则有不全为零的整数 $a;b_1,\cdots,b_{m-k};c_1,c_2,\cdots,c_k$ 使得

$$ay_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}c_iy_i+\sum_{j=1}^{m-k}b_jx_{k+j},\tag{1}$$

其中 $a\neq0$，而且 $\{b_j\}(1\leqslant j\leqslant m-k)$ 不全为零，否则 Y 不是极大线性无关组；不妨假定 $b_1\neq0$ 于是 $X'=\{y_1,\cdots,y_k,y_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_m\}$ 仍然是线性无关组 否则的话，存在 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $\sum_{i=1}^{k+1}a_iy_i+\sum_{j=k+2}^{m}a_jx_j=0$. 由于 X 的线性无关性，$a_{k+1}\neq0$. 将上式乘以 a 并利用式(1)得出

$$\sum_{i=1}^{k}(aa_i+a_{k+1}c_i)y_i+a_{k+1}b_1x_{k+1}+\sum_{j=2}^{m-k}(aa_{k+j}+a_{k+1}b_j)x_{k+j}=0$$

根据上面假定，其中 $a_{k+1}b_1\neq0$. 这个关系式与 X 的线性无关性矛盾 证明了 X' 是线性无关组.

另一方面，对任一个 $x\in G$，由 X' 的极大线性无关性，必存在不全为零的 $d,d_i(i=1,\cdots,m)$ 使得

$$dx+\sum_{i=1}^{k}d_ix_i+\sum_{j=k+1}^{m}d_jx_j=0,\text{其中 }d\neq0.$$

由式(1)即得出

$$b_1 d x+\sum_{i=1}^{k}(b_i d-d_{k+1}c_i)y_i+a_{k+1}y_{k+1}+\sum_{j=2}^{n-k}(b_j d_{k+1}-d_{k+j}b_1)x_{k+j}=0,$$

其中 $b_1 d\neq 0$. 因此 X 是极大线性无关组.

依照所述的替换过程，对满足 $k\leqslant h<m$ 的 h（设 $n=k+h$），经过 h 次替换 X 的成员为 Y 的成员，所得到的仍然是一个极大线性无关组 $\{y_1,\cdots,y_n,x_{n+1},\cdots,x_m\}$ 这与 Y 是极大线性无关组矛盾，因此 $m>n$ 不能成立，得出 $m\leqslant n$. 同理证明 $m<n$ 也不能成立，得出 $m\geqslant n$. 从而有 $m=n$. ▌

定义　当群 G 有一个由 n 个元素构成的极大线性无关组，则该正整数 n 称为群 G 的**秩**. 记为 $\rho(G)=n$.

当这种正整数 n 不存在，则称 G 的秩是无穷的，记为 $\rho(G)=\infty$.

例 1　整数加群和有理数加群的秩都是 1.

例 2　当群 G 的元素都是有限阶的，则 $\rho(G)=0$. 所以秩为零的群是挠群.

定理　设 H 是群 G 的子群，则

$\rho(G)=\rho(H)+\rho(G/H)$. 即 $\rho(H)\leqslant\rho(G)$.

证明　设 $Y=\{y_1,\cdots,y_s\}$ 和 $Z=\{[z_1],\cdots,[z_t]\}$ 分别是 G 和 G/H 的线性无关组，z_j 表示 $[z_j]$ 的代表，因此 $X=\{y_1,\cdots,y_s;z_1,\cdots,z_t\}$ 是 G 的线性无关组. 否则，如果存在不全为零的整数 a_i 与 b_j（$i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,t$）使得

$$\sum_{i=1}^{s}a_iy_i+\sum_{j=1}^{t}b_jz_j=0,$$

取陪集之后得出 $\sum_{j=1}^{t}b_j[z_j]=0$，因而必须 $b_j=0$（$j=1,\cdots,t$）从此 $a_i=0$（$i=1,\cdots,s$）因此得出 $\rho(G)\geqslant s+t$.

当 $\rho(H)$ 或 $\rho(G/H)$ 为 ∞，则 $\rho(G)=\infty$.

当 $\rho(H)$ 与 $\rho(G/H)$ 均 $<\infty$，则取 $s=\rho(H)$，$t=\rho(G/H)$ 因此有 $\rho(G)\geqslant\rho(H)+\rho(G/H)$

剩下的还须证明 X 是 G 的极大线性无关组. 设 $g\in G$，它是陪集 $[g]\in G/H$ 的代表. 根据 Z^* 的极大线性无关性，则存在不全为零的整数 $\lambda, c_1, \cdots, c_t$ 使得 $\lambda[g]+\sum_{j=1}^{t}c_j[z_j]=0$ 其中 $\lambda\neq0$. 从此得出 $y=\lambda g+\sum_{j=1}^{t}c_jz_j$ 是 H 的元素. 根据 Y 的极大线性无关性，存在不全为零的整数 $\mu, d_1, \cdots, d_s$ 使得 $\mu y+\sum d_iy_i=0$，其中 $\mu\neq0$. 以上面的 y 的表达式代入，得出 $\mu\lambda g+\sum_{j=1}^{t}\mu c_jz_j+\sum_{i=1}^{s}d_iy_i=0$. 此中 $\lambda\mu\neq0$. 上式表明 $X\cup\{g\}$ 线性相关. 证明了 X 的极大线性无关性. 因此

$$\rho(G)=s+t=\rho(H)+\rho(G/H).\ \blacksquare$$

§3 有限生成的交换群

定义 对交换群 G，如果存在 G 的一族元素 $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 使得 G 的任意元素 x 可唯一地表为 $x=\sum_{\alpha\in\Gamma}n_\alpha g_\alpha$，$n_\alpha\in\mathbf{Z}$，$\alpha\in\Gamma$；且除有限个 α 之外的 $n_\alpha=0$. 则称 G 是**自由交换群**，其中每个 g_α 的阶是无限的，即每个 g_α 生成一个无限循环子群. 该族元素 $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为 G 的一个**基**，它是 G 的一个最大线性无关组；诸整数 $\{n_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为 x 关于基 $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的**坐标**. 当 Γ 是有限的，则称 G 是**有限生成的**，基的个数称为 G 的**维数**，当 Γ 是无限的，称 G 是无限维的. 约定平凡群是零维的.

注 任何群都有它的秩,而只有自由交换群才有维数的概念.

对于有限生成的交换群,有如下的一些简单性质:

命题 交换群 G 具有 n 个生成元的充要条件是:存在一个 n 维自由交换群 F_n 到 G 的满同态 $f:F_n\to G$,因此 $G\cong F_n/\ker f$.

证明 设 G 具有一组生成元 $g_1,\cdots,g_n$;则对 G 中任一元素 g,存在整数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 使得 $g=\sum_{i=1}^{n}a_ig_i$. 现在假设 n 维自由交换群 F_n 以 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为基底. 于是存在着对应 $h:x_i\to g_i(i=1,\cdots,n)$,它在 F_n 上的线性扩充 $f:F_n\to G$ 定义为对 $x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\in F_n$, $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ih(x_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ig_i\in G$ 显然 f 是满同态.

另一方面,对于以 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为基底的 n 维自由交换群,若存在一个满同态 $f:F_n\to G$,这时令 $f(x_i)=g_i$,则 G 具有 n 个生成元 $g_i(i=1,\cdots,n)$ 由于 f 是满同态,根据§2 的群同态基本定理的推论,则得 $G\cong F_n/\ker f$. ▌

推论 如果 G 具有 n 个生成元,而 H 是 G 的子群,则商群 G/H 也具有 n 个生成元.

证明 由上述命题,这时 G 是 n 维自由群 F_n 的同态像.而商群 G/H 又是 G 经过自然投影的满同态的像,即有 $F_n\xrightarrow{f}G\xrightarrow{\pi}G/H$,此中 f 与 π 均为满同态,所以 G/H 也是 F_n 到 G/H 的满同态 $\pi\circ f$ 的像,由上述命题,G/H 也具有 n 个生成元. ▌

推论 有限生成的交换群 G 的任一子群 H 也是有限生成的

证明 设 G 有 n 个生成元,由上述命题,G 是 n 维自由群 F_n 到 G 的满同态 f 的像. 对于子群 H,则 $f^{-1}(H)$ 是 F_n 的子群,至多是 n 维自由群,由命题,它的同态像 H 至多具有 n 个生成元

例 1　无限循环群是 1 维自由交换群，也称为自由循环群.

例 2　自由交换群的非单位元(零元)都是无限阶的.

例 3　有理数加群 Q 不具有限生成元组，因此它不是有限维自由交换群，但是 Q 的秩等于 1，即 $\rho(Q)=1$.

例 4　如果 G 与 G' 都是 n 维自由群，则 $G\cong G'$.

在这一节最后，我们要阐明有限生成交换群的构造，为此，先引入下列诸引理.

引理 1　设 $a_1,\cdots,a_n(n>1)$ 是不全为零的整数，它们的最大公因子是 1，则存在行列式等于 1 的 n 阶整数矩阵 A，以 $a_1,\cdots,a_n$ 为它的第一行的元素.

证明　当 $n=2$，对最大公因数为 1 的整数 a_1 和 a_2，则存在整数 r_1,r_2 使得 $r_1a_1+r_2a_2=1$. 这时矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -r_2 & r_1 \end{pmatrix}$$

即满足引理的结论.

假设引理对 $n-1$ 时成立，对于 n 个不全为零的整数 $a_1,\cdots,a_n$. 假设 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的最大公因子是 d，令 $a_i=b_id(i=1,\cdots,n-1)$，则 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 的最大公因子等于 1，由归纳假设，存在行列式等于 1 的 $n-1$ 阶整数矩阵

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} b_1 & \cdots\cdots & b_{n-1} \\ a_{2,1} & \cdots\cdots & a_{2,n-1} \\ a_{n-1,1} & \cdots\cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

以 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 为第 1 行.

现设 a_n 与 d 的最大公因子等于 1，则存在整数 s,t 使得 $sa_n+td=1$. 作矩阵

$$A_n = \begin{bmatrix} b_1 d & \cdots & b_{n-1} d & a_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ \varepsilon s b_1 & \cdots & \varepsilon s b_{n-1} & t \end{bmatrix}$$

它满足 $(-1)^{n+1} a_n \varepsilon s \det A_{n-1} + (-1)^{2n} td \det A_{n-1} = [(-1)^{n+1} a_n s\varepsilon + td]\det A_{n-1}$，它等1，只当 $(-1)^{n+1}\varepsilon = +1$．因此，当适当选取 $\varepsilon = +1$ 或 -1 使满足 $(-1)^{n+1}\varepsilon = +1$，则得出 $\det A_n = +1$ 这时相应的 A_n 即满足引理条件 ▌

引理2 设 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 是交换群 G 的生成元组；$a_1, \cdots, a_n$ 是不全为零的整数，它们的公因子为1 则可选取 G 的另一个生成元组，使它包含 $a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$ 作为其中一个成员

证明 由上面引理1，对给定的最大公因子等于1为整数组 $\{a_1, \cdots, a_n\}$，存在 n 阶方阵 A 满足 $\det A = 1$，并且以该整数组为第1行的诸元素 于是 A 的逆方阵 A^{-1} 存在而且 A^{-1} 也是整数方阵，记行矩阵 $g = (g_1 \cdots g_n)$ 的转置为 $(g_1 \cdots g_n)^T$．令 $g = A^{-1}Ag = A^{-1}g'$，此中 $g' = Ag$ 它表示 G 的生成元组 g 经过非奇异线性变换 A 转化为 g'．由于线性无关组经过非奇异线性变换仍然是线性无关组，它仍然是 G 的生成元组，其中第1个元素即 $a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$ ▌

定理 设 G 是有限生成的交换群，而且 G 中除零元之外，无有限阶元素，则 G 是自由交换群

证明 设 $\{g_1, \cdots, g_r\}$ 是有限生成交换群 G 的个数最少生成元组．我们要证明该生成元组的任一线性组合不为零，即证明它们是 G 的一组基 否则的话，假如存在不全为零的整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 使

$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i = 0$ 设这时诸 λ_i 的最大公因子是 d，令 $\lambda_i = d\lambda_i'$ $(i=1,\cdots,r)$，则诸 λ_i' 的公因子是 1，令 $g' = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i' g_i$，由上面的引理对 G 的生成元组 $\{g_1,\cdots,g_r\}$ 和最大公因子为 1 的整数组 λ_i' $(i=1,\cdots,r)$，存在 G 的另一个生成元组，以 g' 作为它的一个成员，而这时有 $dg' = 0$. 但是假设的条件是 G 中除零元外，无有限阶元素，因此 $g' = 0$. 与假设 G 的生成元组最少个数为 r 矛盾. 因此 $g_1,\cdots,g_r$ 是自由交换群 G 的基. ▌

定理　设 G 是有限生成的交换群，而且 G 中的元素都是有限阶的，则

$$G \cong Z_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus Z_{\theta_r},$$

其中 $\theta_i \in Z$，$\theta_i > 1$ $(i=1,\cdots,r)$ 而且 θ_i 整除 θ_{i+1}，记为 $\theta_i | \theta_{i+1}$ $(i=1,\cdots,r-1)$.

证明　对于任一有限生成的交换群，必有一个整数 r，使群的生成元组的个数为 r. 我们以归纳法证明定理. 当 $r=1$，即一个生成元 g_1，而且是具有阶为 θ_1 的交换群，则它必取形式 Z_{θ_1} $(\theta_1 > 1)$，即 $G \cong Z_{\theta_1}$. 假设定理对 $r-1$ 的情况成立. 于是，对于 r 个生成元的情况，其中必有一个生成元具最小的阶 θ_1，其余的 $r-1$ 个生成元 $g_2,\cdots,g_r$ 分别具阶数 $\theta_2,\cdots,\theta_r$，它们生成 G 的子群 G_1. 根据归纳假设，$G_1 \cong Z_{\theta_2} \oplus \cdots \oplus Z_{\theta_r}$ 而且 $\theta_i | \theta_{i+1}$ $(i=2,\cdots,r)$. 我们要证明这时 $G \cong Z_{\theta_1} \oplus G_1$，即证明 $Z_{\theta_1} \cap G_1 = \{0\}$.

假如以 g_1 为基的子群具阶 θ_1 与子群 G_1 的交非空，即存在两个子群的公共元素 x，则 x 可表为 $a_1 g_1$，又可表为 G_1 的元素 $a_2 g_2 + \cdots + a_r g_r$. 即存在不全为零的整数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 使得

$$a_1 g_1 = a_2 g_2 + \cdots + a_r g_r,$$

左边是 $\mathbf{Z}_\theta$ 中的元素，而右边是 G_1 中的元素，由于 g_1 的阶是 θ_1，上式中 $0<a_i<\theta_1$. 现设诸 $a_i(i=1,\cdots,r)$ 的最大公因子为 d，则 $\frac{a_1}{d},\cdots,\frac{a_r}{d}$ 具最大公因子 1，它们是 G 的生成元组；由前面引理，存在 G 的一个生成元组，以

$$g = \frac{a_1}{d}g_1 + \frac{a_2}{d}g_2 + \cdots + \frac{a_r}{d}g_r$$

为一个成员．但这时 g 的阶是 $d(d\leqslant a_1<\theta_1)$，与 G 中元素最小的阶为 θ_1 矛盾，因此 $Z_{\theta_1}\cap G_1=\{0\}$，而且 g_i 的阶是 θ_i，从此得出

$$G\cong \mathbf{Z}_{\theta_1}\oplus\mathbf{Z}_{\theta_2}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}_{\theta_r}$$

最后还要证明 $\theta_i|\theta_{i+1}$. 如果 θ_i 不能整除 θ_{i+1}，将生成元组 $\{g_1,\cdots,g_r\}$ 换为 $\{g_1',\cdots,g_r'\}$，其中

$$\begin{cases} g_1' = g_1 \\ g_i' = g_{i-1}' + g_i(i=2,\cdots,r) \end{cases}$$

于是 $G\cong\mathbf{Z}g_1'\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}g_r'$，则诸 g_i' 的阶 θ_i' 分别是

$$\theta_i' = \begin{cases} \theta_1 (i=1) \\ \frac{\theta_{i-1}'}{d_i}\theta_i & (i=2,\cdots,r) \end{cases}$$ 其中 d_i 是 θ_{i-1}' 和 θ_i 的最大公因子.

上式当 $r=1$ 显然成立．假设对 $r=i-1$ 时，上式成立，即若 $\theta_{i-1}'g_{i-1}'=0$；于是

$$\theta_i'g_i' = \frac{\theta_i}{d_i}(\theta_{i-1}'g_{i-1}') + \frac{\theta_{i-1}'}{d_i}(\theta_i g_i) = 0$$

要证明这时 g_i' 的阶是 θ_i'，还须证明若有整数 δ 使 $\delta g_i'=0$，则 δ 必是 θ_i' 的倍数，亦即 $\theta_i'|\delta$. 为此，设 $\delta g_i'=\delta(g_{i-1}'+g_i)=\delta g_{i-1}'+\delta g_i=0$，则应有 $\delta g_{i-1}'=0$ 和 $\delta g_i=0$，由于 g_{i-1}' 与 g_i 阶分别为

θ_{i-1}' 和 θ_i，因此 $\theta_{i-1}'|\delta$ 且 $\theta_i|\delta$，根据 θ_i' 的表达式，θ_{i-1}' 与 θ_i 的最小公倍数 θ_i' 也满足 $\theta_i'|\delta$．完成了 θ_i' 是 g_i' 的阶的证明．

而且　　$G\cong Z_{\theta_1'}\oplus\cdots\oplus Z_{\theta_r'}$

其中诸 θ_i' 满足关系式 $\theta_{i+1}'=\theta_i'\left(\frac{\theta_{i+}}{d_{i+1}}\right)$，$d_{i+1}$ 是 θ_i' 与 θ_{i-1} 的最大公因子，因此 $\theta_i'|\theta_{i+1}'$．▌

定义　设 G 为有限生成的交换群，则 G 中所有的有限阶元素组成 G 的挠子群，上述定理中诸正整数 θ_i 称为挠系数．

定理　设 G 是有限生成的交换群，T 是 G 的挠子群，则 G/T 是自由交换群，而且

$$G\cong T\oplus G/T.$$

证明　设 G 是有限生成的交换群，T 是有限生成的，则 G/T 也是有限生成的．对于 G/T 的任意元素 $g+T(g\in G)$，此中 T 是 G 的挠子群．如果存在正整数 n 使得 $n(g+T)=ng+T$ 是有限阶的话，即 $ng+T\in T$，则应有 $ng\in T$．因此存在正整数 m 使 $mng=0\in G$，则 $g\in T$．因而 $g+T$ 是 G/T 的零元素，亦即 G/T 的有限阶元素必为 T 的元素，从此得知 G/T 的非零元素必定是无限阶的，它们构成自由的交换群．

至于定理的最后一个结论，我们从正合序列

$$0\to T\xrightarrow{i}G\xrightarrow{\pi}G/T\to 0,$$

其中 i 是内射，π 是自然投影．因为存在着同态 $\rho: G/T\to G$ 由 $\rho(g+T)=g$，$g\in G$ 所决定．显然，$\pi(g)=g+T$，所以 $\pi\rho=1_{G/T}$，表明该序列是分裂的，因此

$$G\cong T\oplus G/T.$$ ▌

定理　（有限生成的交换群的基本定理）设 G 为有限生成的

交换群,则

$$G \cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}_{m个} \oplus \mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r} \tag{1}$$

其中 m, r 和诸 $\theta_i (i=1,2,\cdots,r)$ 都是正整数, $\theta_i > 1$ 而且 $\theta_i | \theta_{i+1}$ $(i=1,\cdots,r-1)$.

这时称 G 的秩是 m, 挠系数是 $\theta_i (i=1,\cdots,)$; 式(1)称为 G 的标准分解.

自由群的秩 m 和诸挠系数 $\theta_i > 1 (i=1,\cdots,r)$ 由群 G 完全决定, 它们称为 G 的不变量完全组.

证明 分解式(1)的存在性乃前述定理的一种表达形式, 这时 T 表为 $\mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r}$, 而 G/T 是 m 个生成元的自由交换群, 即 $A = G/T \cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}_{m个}$.

还须证明自由群部分的维数 $m = \rho(G/T)$ 以及挠子群的诸挠系数 $\theta_1, \cdots, \theta_r$ 均由 G 完全确定. 亦即证明分解式(1)是唯一的.

设 G 的分解式如(1)所示. 因为 G 的挠子群 T 是 G 中有限阶元素组成的子群, 当我们把式(1)中的 $\mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r}$ 看为 G 的子群, 则它当然包含在 T 中, 即 $\mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r} \subset T$. 另方面, 假如 G 中有某个有限阶(不妨假设为 q 阶)元素 x, 即 $qx=0$. 则 x 可记为 $x = a + b$, 其中 $a \in A = G/T$, $b \in \mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r}$ 由于 $q(a+b) = 0$, 所以 $q\theta_r(a+b) = 0$. 而 $b \in \mathbf{Z}_{\theta_i}$, $\theta_r b = 0$ 从 $q\theta_r a = q\theta_r(a+b) - q\theta_r b$, 因为右边为零, 所以左边亦为零, 而由于 $a \in A$, 这蕴涵 $a = 0$. 表明 T 包含在 $\mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r}$ 之中, 因此 $T = \mathbf{Z}_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_r}$. 从而得知 $G/T = A$ 是自由的. 由关系式 $\rho(G) = \rho(T) + \rho(G/T)$, 与 $\rho(T) = 0$ 得出 $\rho(G) = \rho(G/T)$ 所以自由群部分 G/T 的维数由 G 的秩完全决定.

剩下的还须证明子群 T 的诸挠系数 $\theta_i(i=1,\cdots,r)$由群 G 本身所确定.

不难证明 nZ_m 的阶是$\frac{m}{(m,n)}$,其中(m,n)是 m 与 n 的最大公因子,从 G 的直和分解式(1),这时

$T=Z_{\theta_1}\oplus\cdots\oplus Z_{\theta_r}$,

对任一正整数 n,定义同态 $f:T\longrightarrow nT$ 为 $f(x)\longrightarrow nx$, $x\in T$,则同态 f 的像 $nT=nZ_{\theta_1}\oplus\cdots\oplus nZ_{\theta_r}$的阶是 G 的不变量.因为 f 的核等于 $Z_{(\theta_1,n)}\oplus Z_{(\theta_2,n)}\oplus\cdots\oplus Z_{(\theta_r,n)}$,因此 $nT\cong T/ker\ f=Z_{\theta_1}/Z_{(\theta_1,n)}\oplus\cdots\oplus Z_{\theta_r}/Z_{(\theta_r,n)}$.所以 nT 的阶

$$\varphi(n)=\frac{\theta_1}{(\theta_1,n)}\cdot\frac{\theta_2}{(\theta_2,n)}\cdots\frac{\theta_r}{(\theta_r,n)}.$$

此中每个因子都是大于或等于 1 的正整数.由于 $\theta_i\mid\theta_{i+1}(i=1,\cdots,r-1)$,因此若有一个因子等于 1,则该因子之前诸因子必均等于 1.现在记 $\varphi(n)$以前 i 个因子的乘积为

$$\varphi_i(n)=\frac{\theta_1}{(\theta_1,n)}\cdot\frac{\theta_2}{(\theta_2,n)}\cdots\frac{\theta_i}{(\theta_i,n)},$$

当 $n=\theta_i$,则 $\varphi_i(n)=1$;当 $0<n<\theta_i$,则 $\varphi_i(n)\neq1$.从此得知 θ_r 是使 $\varphi(n)=1$ 的 n 的最小值.因为 $\varphi(n)$是 nT 的阶,表明 θ_r 由 G 完全决定;而 θ_i 是使 $\varphi_i(n)=1$ 的 n 的最小值,因此这时 θ_i 也是使 nT 的阶 $\varphi(n)=\frac{\theta_{i+1}}{(\theta_{i-1},n)}\cdots\frac{\theta_r}{(\theta_r,n)}$的 n 的最小值,依次归纳地证明 $\theta_r,\theta_{r-1},\cdots,\theta_{i+1}$的不变性即蕴涵 θ_i 的不变性.这也就证明了诸 $\theta_i(i=1,\cdots,r)$的不变性,即由 G 的子群 T 完全确定.
▮

参考文献

江泽涵.拓扑学引论.上海:上海科技出版社,1978

李元熹,张国樑编.拓扑学.上海:上海科技出版社,1986

陈吉象.代数拓扑基础讲义.北京:高等教育出版社,1987

Amstrong M.A.基础拓扑学.孙以丰译.北京:北京大学出版社,1983

Munkers J.R.代数拓扑基础教程.熊金城译.石家庄:河北教育出版社,1991

Hocking J.G & Young G.S, *Topology*, Mass:Addison - Wesly, Reading. 1961

Massey W. S, *Algebraic Topology: An Introduction*, New York:Harcour, Brace & World, Inc., 1967

Croom F. H, *Basic Concepts of Algebraic topology*, New York:Springer - Verlag, 1978

Vick J. W, *Homlolgy Theory: An Infroduction to Algebraic Topology*, New York:Academic Press, 1973

Greenberg M.J & Harper J.R, *Algebaic Topology*, A *First Course*, Mass:The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1981